

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baumann P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler

Redactor: R. Sängler

## INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

JINDRA, F.: Eindimensionale Probleme bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz . . . . .	345
KIRCHNER, F.: Einfache Resonanzversuche am symmetrischen Kreisel . . . . .	355
WIEBELITZ, R.: Zur Theorie der erzwungenen Schwingungen des symmetrischen Kreisels . . . . .	362
POPOFF, K.: Sur la thermodynamique des processus irréversibles . . . . .	378
RUTISHAUSER, H.: Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix mit Hilfe des Quotienten-Differenzen-Algorithmus . . . . .	387

## Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

CONWAY, H. D.: The Indentation of an Orthotropic Half Plane . . . . .	402
IBRAHIM, A. A. K., and KABIEL, A. M. I.: On the Oscillating Cylinder Viscometer . . . . .	405
PRUPPACHER, H. R., und SÄNGER, R.: Mechanismus der Vereisung unterkühlter Wassertropfen durch disperse Keimsubstanzen I . . . . .	407
SHENG, P.-L.: Note on the Torsional Rigidity of Cylinders of Circular Sector Cross-Sections . . . . .	416

## Varia - Miscellaneous - Divers

Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 7. bis 8. Mai 1955 in Vevey	420
Jahrestagung GAMM 1956. . . . .	425
Erratum . . . . .	425
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques . . . . .	426

ZAMP

Vol. VI

Fasc. 5

Pag. 345-428

25. 9. 55

Birkhäuser Verlag Basel, Schweiz

UNIVERSITY OF  
LIBRARY

JAN 4 '56

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängner, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten mit mehr als 16 Seiten Umfang haben von der 17. Seite an einen *Beitrag an die Satzkosten* von Fr. 20.- pro Seite und von der 25. Seite an einen solchen von Fr. 35.- pro Seite zu entrichten. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical should be addressed to the *Editor*. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of Original Papers exceeding 16 pages are requested to pay a *contribution* of Fr. 20.- per page for pages 17-24, and of Fr. 35.- per page for pages 25 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages, une *contribution* de Fr. 20.- par page doit être payée pour les pages 17-24; à partir de page 25 la contribution est de Fr. 35.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 38.-, Ausland sFr. 48.-, Einzelnummer Fr. 10.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 38.-, foreign Fr. 48.-, single copy Fr. 10.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 38.-, étranger Fr. 48.-, le numéro Fr. 10.-

Postabonnement — Post-Office Subscription — Abonnement par office postal

Belgien, Luxemburg  
Italien

Dänemark  
Marokko

Deutschland  
Norwegen

Finnland  
Portugal

Holland  
Schweden

Inserate/Advertisements/Annonces:  $\frac{1}{2}$  Seite/page: Fr. 165.-,  $\frac{1}{4}$  Seite/page: Fr. 88.-,  $\frac{1}{8}$  Seite/page: Fr. 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. — All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. — Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

Copyright 1955 by Birkhäuser Verlag, Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland



# Eindimensionale Probleme bei einem nichtlinearen Elastizitätsgesetz

Von FRIEDRICH JINDRA, Stuttgart

## 1. Einleitung

Die klassische Elastizitätstheorie geht vom Hooke'schen Gesetz aus, das einen linearen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen annimmt. Dabei werden die Verzerrungen als unendlich klein behandelt. Nun gibt es aber auch Werkstoffe, die schon bei diesen kleinen Verzerrungen ein nicht-lineares Verhalten zeigen und also zur Beschreibung des elastischen Verhaltens ein nichtlineares Elastizitätsgesetz erfordern.

Hier benützen wir ein nichtlineares Elastizitätsgesetz für kleine Verzerrungen, das sämtliche elastischen Probleme umfasst und die klassische Theorie als Grenzfall enthält. Auf ein rechtwinkliges  $(x, y, z)$ -System bezogen, lauten die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen dieses nichtlinearen Gesetzes in allgemeiner Form<sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{3K} k(s_0) \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) (\sigma_x - \sigma_0), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{3K} k(s_0) \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) (\sigma_y - \sigma_0), \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{3K} k(s_0) \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) (\sigma_z - \sigma_0), \\ \psi_{xy} &= \frac{1}{G} g(t_0^2) \tau_{xy}, \quad \psi_{yz} = \frac{1}{G} g(t_0^2) \tau_{yz}, \quad \psi_{zx} = \frac{1}{G} g(t_0^2) \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dabei bedeuten  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  die Normalspannungen,  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  die Schubspannungen,  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  die Dehnungen und  $\psi_{xy}, \psi_{yz}, \psi_{zx}$  die Scherungen,  $K$  und  $G$  den Kompressionsmodul und den Schubmodul,  $s_0$  und  $t_0$  die dimensionslosen Spannungsgrößen

$$\left. \begin{aligned} s_0 &= \frac{\sigma_0}{3K} \quad \text{mit} \quad \sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \\ t_0 &= \frac{\tau_0}{G} \quad \text{mit} \quad \tau_0^2 = \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_0)^2 + (\sigma_y - \sigma_0)^2 + (\sigma_z - \sigma_0)^2] \right. \\ &\quad \left. + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

<sup>1)</sup> H. KAUDERER, Ing.-Arch. 17, 450 (1949).

Die Funktionen  $k(s_0)$  und  $g(t_0^2)$ , die als sogenannte Kompressionsfunktion und Schubfunktion neu eingeführt werden, und die im Falle des Hookeschen Gesetzes den Wert Eins annehmen, werden als Potenzreihen von  $s_0$  bzw. von  $t_0^2$  angesetzt:

$$\left. \begin{aligned} k(s_0) &= 1 + k_1 s_0 + k_2 s_0^2 + k_3 s_0^3 + \dots, \\ g(t_0^2) &= 1 + g_2 t_0^2 + g_4 t_0^4 + g_6 t_0^6 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die Funktionen (3) sind für jeden Stoff durch geeignete Versuche zu ermitteln.

Hier handelt es sich um Lösungen von elastomechanischen Problemen, die nur von einer Koordinate abhängen. Legt man kartesische Koordinaten zugrunde, so ergibt sich sofort der einfache Zugversuch. Durch die experimentelle Verwirklichung dieses einfachen Spannungszustandes kann man die zwei willkürlichen Funktionen (3) des Elastizitätsgesetzes (1) bestimmen. Wesentlich interessanter sind die eindimensionalen Probleme mit Zylinder- oder Kugelkoordinaten. Bei allen Zahlenbeispielen zeigt es sich, dass die Spannungsverteilung von den Werten der linearen Theorie erheblich abweicht, und zwar insbesondere an den Rändern, so dass der aus der technischen Praxis häufig bekannte erhebliche Abbau der Spannungsspitzen schon durch sehr kleine Abweichungen des Elastizitätsgesetzes von der Linearität erklärt werden kann.

## 2. Der Zugversuch

Der Zugversuch eignet sich zur Bestimmung der Funktionen (3), wenn man dabei ausser der Längsdehnung auch noch die Querdehnung in Abhängigkeit von der Spannung misst<sup>1)</sup>.

Ist bei einem Zugversuch von den Spannungen nur  $\sigma_x = \sigma \neq 0$ , so folgt nach (2)

$$s_0 = \frac{\sigma}{9K}, \quad t_0^2 = \frac{2}{9} \cdot \frac{\sigma^2}{G^2}.$$

Damit erhält man nach (1) für die Dehnung in Zugrichtung

$$\varepsilon_x = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{3K} k\left(\frac{\sigma}{9K}\right) + \frac{1}{G} g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right) \right] \sigma \quad (4)$$

und für die Querdehnung

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{3K} k\left(\frac{\sigma}{9K}\right) - \frac{1}{2G} g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right) \right] \sigma. \quad (5)$$

Aus (4) und (5) ergeben sich dann die Beziehungen

$$k\left(\frac{\sigma}{9K}\right) = \frac{3K}{\sigma} (\varepsilon_x + 2\varepsilon_y), \quad g\left(\frac{2\sigma^2}{9G^2}\right) = \frac{2G}{\sigma} (\varepsilon_x - \varepsilon_y), \quad (6)$$

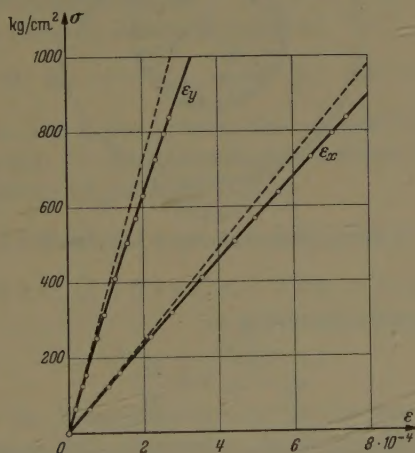
woraus sich sowohl  $K$  und  $k(s_0)$  als auch  $G$  und  $g(t_0^2)$  ermitteln lassen.

<sup>1)</sup> H. KAUDERER, Ing.-Arch. 17, 460 (1949).

Bei Versuchen<sup>1)</sup> an gezogenem Kupfer ergab sich der in Figur 1 wiedergegebene Verlauf der Längs- und Querdehnung abhängig von der Zugspannung. Die Hookesche Gerade ist als Tangente der Kurven im Nullpunkt gestrichelt eingetragen. Man findet daraus

$$K = 1,37 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{und} \quad G = 0,46 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2.$$

Wertet man die Versuchsergebnisse nach (6) aus, so darf innerhalb der Versuchsgenauigkeit die Kompressionsfunktion  $k(s_0)$  konstant gleich Eins gesetzt



Figur 1

Spannungs-Dehnungsdiagramm für gezogenes Kupfer.

werden, und die Schubfunktion  $g(t_0^2)$  kann in guter Näherung durch die ersten zwei Glieder der Reihenentwicklung (3) dargestellt werden, also

$$k(s_0) \equiv 1, \quad g(t_0^2) \equiv 1 + g_2 t_0^2 \quad (7)$$

mit  $g_2 = 0,18 \cdot 10^6$ .

### 3. Das dickwandige Rohr

Wird ein dickwandiges, zylindrisches Rohr, dessen Länge gross gegenüber seinem Durchmesser ist, durch gleichmässigen Innendruck beansprucht, so liegt in guter Näherung ein ebenes Spannungsproblem vor. Für die axiale Spannung wird also vorausgesetzt:

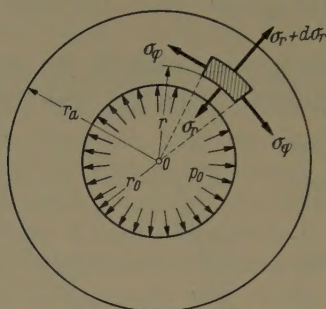
$$\sigma_z = 0. \quad (8)$$

<sup>1)</sup> K. CLAUS, *Bestimmung der Poissonschen Zahl reiner Metalle und ihr Gang im periodischen System*, Dissertation (Stuttgart 1953), S. 39.



Die Belastung ruft einen drehsymmetrischen Spannungs- und Formänderungszustand hervor. Das Problem hängt nur von der Koordinate  $r$  ab.

Das Kräftegleichgewicht an irgendeinem aus der Zylinderwand herausgeschnittenen Element (Figur 2) liefert die Beziehung zwischen der Radialspan-



Figur 2  
Dickwandiges Rohr unter Innendruck.

nung  $\sigma_r$  und der Tangentialspannung  $\sigma_\varphi$

$$\sigma_\varphi = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr}. \quad (9)$$

Mit den Hauptspannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_\varphi$  errechnet man nach (2) die invarianten Spannungsgrößen zu

$$s_0 = \frac{1}{9K} (\sigma_r + \sigma_\varphi), \quad t_0^2 = \frac{2}{9G^2} (\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi). \quad (10)$$

Mittels der radialen Verschiebung  $u$  lassen sich die Dehnungen in radialer und tangentialer Richtung darstellen durch

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}. \quad (11)$$

Der Zusammenhang der Dehnungen mit den Spannungen folgt dann aus dem nichtlinearen Elastizitätsgesetz (1) zu

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = \frac{1}{9K} k(s_0) (\sigma_r + \sigma_\varphi) + \frac{1}{6G} g(t_0^2) (2\sigma_r - \sigma_\varphi), \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{u}{r} = \frac{1}{9K} k(s_0) (\sigma_r + \sigma_\varphi) + \frac{1}{6G} g(t_0^2) (2\sigma_\varphi - \sigma_r). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Durch Entfernen von  $u$  aus den beiden Gleichungen (12) und mit (9) ergibt sich

die Differentialgleichung für die Radialspannung

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{9K} \cdot \frac{d}{dr} [k(s_0) (2\sigma_r + r\sigma_r')] + \frac{1}{6G} \cdot \frac{d}{dr} [g(t_0^2) (\sigma_r + 2r\sigma_r')] \\ + \frac{1}{2G} g(t_0^2) \sigma_r' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

mit

$$s_0 = \frac{1}{9K} (2\sigma_r + r\sigma_r'), \quad t_0^2 = \frac{2}{9G^2} (\sigma_r^2 + r\sigma_r\sigma_r' + r^2\sigma_r'^2). \quad (14)$$

Striche bedeuten Ableitungen nach  $r$ .

Hierzu treten die linearen Randbedingungen:

$$\sigma_r = 0 \quad \text{für } r = r_a, \quad \sigma_r = -p_0 \quad \text{für } r = r_0, \quad (15)$$

wobei  $r_a$  den äusseren und  $r_0$  den inneren Halbmesser bedeutet.

Beschränkt man sich für die Anwendungen auf den Sonderfall (7), so vereinfacht sich die Differentialgleichung (13) zu

$$\left. \begin{aligned} (2\lambda r^2 \sigma_r'^2 + 2\lambda r \sigma_r' \sigma_r + \lambda \sigma_r^2 + 1) r \sigma_r'' \\ + (4\lambda r^2 \sigma_r'^2 + 5\lambda r \sigma_r' \sigma_r + 3\lambda \sigma_r^2 + 3) \sigma_r' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

mit der Stoffzahl

$$\lambda = \frac{g_2 K}{(3K + G) G^2}. \quad (17)$$

Wir wollen hier die Integralkurve von (16) in der Umgebung der Stelle  $r = r_a$  durch eine Potenzreihe darstellen. Zu diesem Zweck setzen wir in (16)

$$s = 1 - \frac{r}{r_a}$$

und machen für

$$\sigma_r(r) = \bar{\sigma}_r \left(1 - \frac{r}{r_a}\right) = \bar{\sigma}_r(s)$$

den Ansatz

$$\bar{\sigma}_r(s) = \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\mu} s^{\mu} = c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \dots, \quad (18)$$

wobei wir das erste Glied  $c_0 = 0$  setzen und somit von vornherein die erste Randbedingung (15) erfüllen.

Geht man mit (18) in (16) ein, so lassen sich die Koeffizienten der Reihenentwicklung durch Vergleich entsprechender Potenzen von  $s$  der Reihe nach berechnen:

$$2(1 + 2\lambda c_1^2) c_2 - (3 + 4\lambda c_1^2) c_1 = 0,$$

$$6(1 + 2\lambda c_1^2) c_3 - 8c_2 + 2\lambda(8c_2 c_1 - 20c_1^2) c_2 + 13\lambda c_1^3 = 0,$$

$$12(1 + 2\lambda c_1^2) c_4 - 15c_3 + 3\lambda(24c_2 c_1 - 28c_1^2) c_3$$

$$+ \lambda(16c_2^2 - 108c_2 c_1 + 95c_1^2) c_2 - 12\lambda c_1^3 = 0,$$

$$20 (1 + 2 \lambda c_1^2) c_5 - 24 c_4 + 4 \lambda (32 c_2 c_1 - 36 c_1^2) c_4 \\ + \lambda (72 c_3 c_1 + 96 c_2^2 - 412 c_2 c_1 + 173 c_1^2) c_3 \\ - \lambda (88 c_2^2 - 212 c_2 c_1 + 71 c_1^2) c_2 = 0 ,$$

$$30 (1 + 2 \lambda c_1^2) c_6 - 35 c_5 + 5 \lambda (40 c_2 c_1 - 44 c_1^2) c_5 \\ + \lambda (240 c_3 c_1 + 160 c_2^2 - 668 c_2 c_1 + 273 c_1^2) c_4 \\ + \lambda (180 c_3 c_2 - 372 c_3 c_1 - 476 c_2^2 + 734 c_2 c_1 - 116 c_1^2) c_3 \\ + \lambda (150 c_2^2 - 135 c_2 c_1) c_2 = 0 ,$$

$$42 (1 + 2 \lambda c_1^2) c_7 - 48 c_6 + 6 \lambda (48 c_2 c_1 - 52 c_1^2) c_6 \\ + \lambda (360 c_3 c_1 + 240 c_2^2 - 984 c_2 c_1 + 395 c_1^2) c_5 \\ + \lambda (192 c_4 c_1 + 576 c_3 c_2 - 1164 c_3 c_1 - 744 c_2^2 + 1120 c_2 c_1 - 171 c_1^2) c_4 \\ + \lambda (108 c_3^2 - 828 c_3 c_2 + 615 c_3 c_1 + 754 c_2^2 - 430 c_2 c_1) c_3 - 84 \lambda c_2^3 = 0 ,$$

$$56 (1 + 2 \lambda c_1^2) c_8 - 63 c_7 + 7 \lambda (56 c_2 c_1 - 60 c_1^2) c_7 \\ + \lambda (504 c_3 c_1 + 336 c_2^2 - 1360 c_2 c_1 + 539 c_1^2) c_6 \\ + \lambda (560 c_4 c_1 + 840 c_3 c_2 - 1672 c_3 c_1 - 1068 c_2^2 + 1582 c_2 c_1 - 236 c_1^2) c_5 \\ + \lambda (448 c_4 c_2 - 888 c_4 c_1 + 504 c_3^2 - 2524 c_3 c_2 \\ + 1834 c_3 c_1 + 1124 c_2^2 - 622 c_2 c_1) c_4 \\ - \lambda (468 c_3^2 - 1235 c_3 c_2 + 336 c_3 c_1 + 395 c_2^2) c_3 = 0 ,$$

usw.

Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt:

$$\left. \begin{aligned} c_2 &= \frac{c_1}{2 N} (3 + 4 a) , \\ c_3 &= \frac{c_1}{6 N^3} (12 + 51 a + 84 a^2 + 44 a^3) , \\ c_4 &= \frac{c_1}{24 N^5} (60 + 396 a + 1312 a^2 + 2224 a^3 + 1920 a^4 + 640 a^5) , \\ c_5 &= \frac{c_1}{120 N^7} (360 + 2955 a + 14877 a^2 + 42870 a^3 + 76072 a^4 \\ &\quad + 81120 a^5 + 48016 a^6 + 11872 a^7) , \\ c_6 &= \frac{c_1}{720 N^9} (2520 + 22365 a + 158325 a^2 + 650724 a^3 \\ &\quad + 1761036 a^4 + 3191968 a^5 + 3877552 a^6 \\ &\quad + 3023680 a^7 + 1369920 a^8 + 271104 a^9) , \end{aligned} \right\} \quad (19)$$



usw. mit den Abkürzungen

$$a = \lambda c_1^2, \quad N = 1 + 2\lambda c_1^2. \quad (19a)$$

Die Lösung ist nun der zweiten Randbedingung (15) anzupassen. Man erhält

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\mu} \left(1 - \frac{r_0}{r_a}\right)^{\mu} = -p_0, \quad (20)$$

womit eine Bestimmungsgleichung für die Konstante  $c_1$  gewonnen ist.

Die Tangentialspannung  $\bar{\sigma}_{\varphi}$  findet man endlich nach (9) und (18) zu

$$\bar{\sigma}_{\varphi}(s) = \bar{\sigma}_r(s) - (1-s) \frac{d\bar{\sigma}_r}{ds} = \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\mu} s^{\mu} - (1-s) \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1) c_{\mu+1} s^{\mu}. \quad (21)$$

Für die beiden Ringspannungen an den Stellen  $r = r_a$  und  $r = r_0$  folgt

$$\bar{\sigma}_{\varphi}(0) = -c_1, \quad \bar{\sigma}_{\varphi}\left(1 - \frac{r_0}{r_a}\right) = -p_0 - \frac{r_0}{r_a} \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1) c_{\mu+1} \left(1 - \frac{r_0}{r_a}\right)^{\mu}. \quad (22)$$

Für  $\lambda \rightarrow 0$  geht unsere Lösung (18) in die bekannte Lösung der linearen Theorie über. Nach (19) findet man nämlich für die Koeffizienten der linearen Theorie

$$c_{\mu}^* = \frac{1}{2} (\mu+1) c_1^* \quad (\mu > 1).$$

Damit wird

$$\bar{\sigma}_r^*(s) = \sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\mu}^* s^{\mu} = \frac{1}{2} c_1^* \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1) s^{\mu} - \frac{1}{2} c_1^* = \frac{1}{2} c_1^* \frac{1}{(1-s)^2} - \frac{1}{2} c_1^*$$

oder

$$\sigma_r^*(r) = -\frac{1}{2} c_1^* \left(1 - \frac{r_a^2}{r^2}\right). \quad (23)$$

Die Randbedingung (15) verlangt

$$c_1^* = -\frac{2 p_0}{\varrho^2 - 1} \quad (24)$$

mit der Abkürzung

$$\varrho = \frac{r_a}{r_0}. \quad (25)$$

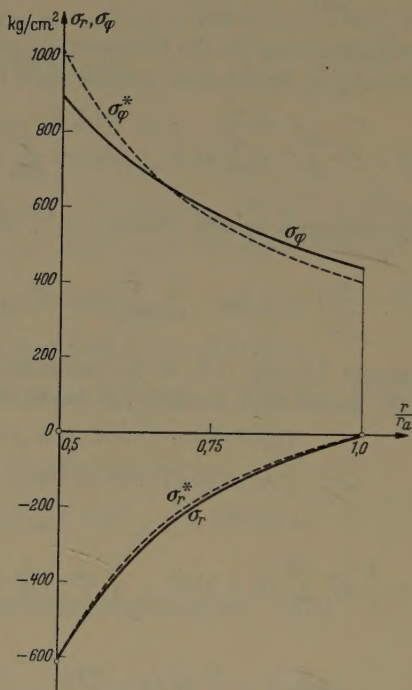
Die Spannungskomponenten der linearen Theorie nehmen dann in der Tat die bekannten Werte an:

$$\sigma_r^* = \frac{p_0}{\varrho^2 - 1} \left(1 - \frac{r_a^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{\varphi}^* = \frac{p_0}{\varrho^2 - 1} \left(1 + \frac{r_a^2}{r^2}\right) \quad (26)$$

samt den Randwerten

$$(\sigma_{\varphi}^*)_{r=r_a} = \frac{2 p_0}{\varrho^2 - 1}, \quad (\sigma_{\varphi}^*)_{r=r_0} = p_0 \frac{\varrho^2 + 1}{\varrho^2 - 1}.$$

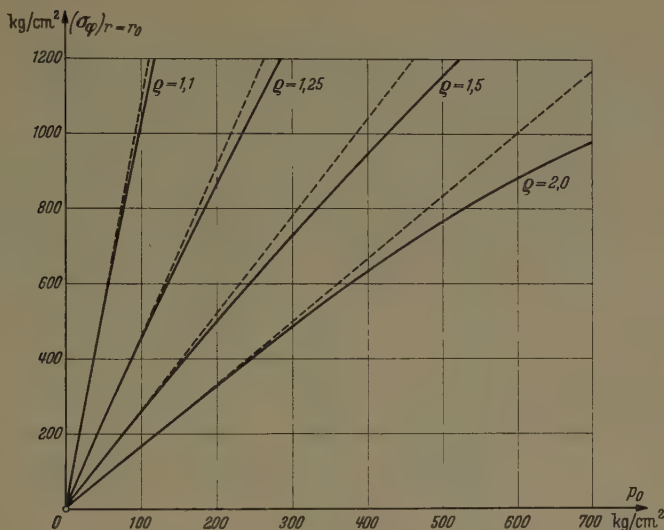
Als Zahlenbeispiel wählen wir Kupfer von Ziffer 2, für welches man  $\lambda = 0,255 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^4/\text{kg}^2$  errechnet. Figur 3 zeigt den Verlauf der Radialspan-



Figur 3

Spannungsverteilung in dickwandigem Rohr.

nungen  $\bar{\sigma}_r$  und  $\sigma_r^*$  sowie der Tangentialspannungen  $\bar{\sigma}_{\varphi}$  und  $\sigma_{\varphi}^*$  längs eines Halbmessers (und zwar für  $\varrho = 2,0$  und für  $p_0 = 610 \text{ kg/cm}^2$ ). Die Spannungsverteilung wird infolge der Nichtlinearität gleichmässiger, die Spannungsspitze am Innenrand wird herabgesetzt. Figur 4 stellt die Abhängigkeit der Tangentialspannung  $\sigma_{\varphi}$  am Innenrand  $r = r_0$  vom Innendruck  $p_0$  für verschiedene Werte des Halbmesserverhältnisses  $\varrho$  dar. Mit steigendem  $\varrho$  weichen die Kurven  $(\sigma_{\varphi})_{r=r_0}$  immer mehr von den Geraden der linearen Theorie ab, die gestrichelt eingetragen sind. Der Einfluss der Nichtlinearität wird also bei grösseren Halbmesserverhältnissen stärker.



Figur 4

Änderung der Tangentialspannung am Innenrand für dickwandiges Rohr.

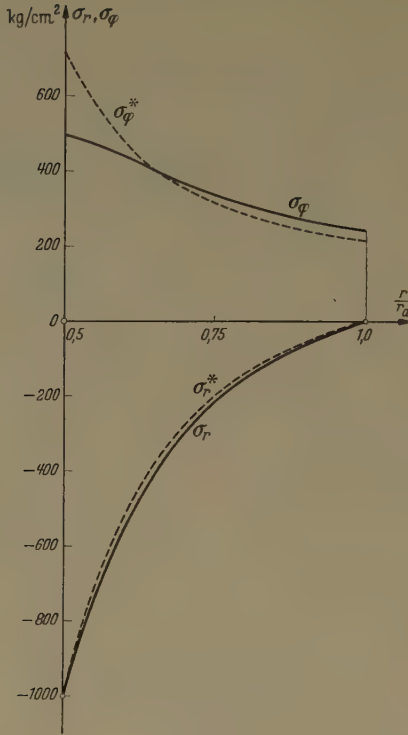
#### 4. Die Hohlkugel

Legt man Kugelkoordinaten zugrunde, so ergibt sich hier die Berechnung der Spannungsverteilung in einer dickwandigen Hohlkugel, die durch gleichmässigen Innendruck oder Aussendruck beansprucht wird. Die Lösung dieses Problems ist bereits an einer anderen Stelle<sup>1)</sup> mitgeteilt worden. Unter Beschränkung auf den Sonderfall (7) gelingt es, die Differentialgleichung für die radiale Spannung geschlossen zu integrieren. Auf die Wiedergabe der Formeln möge hier verzichtet werden.

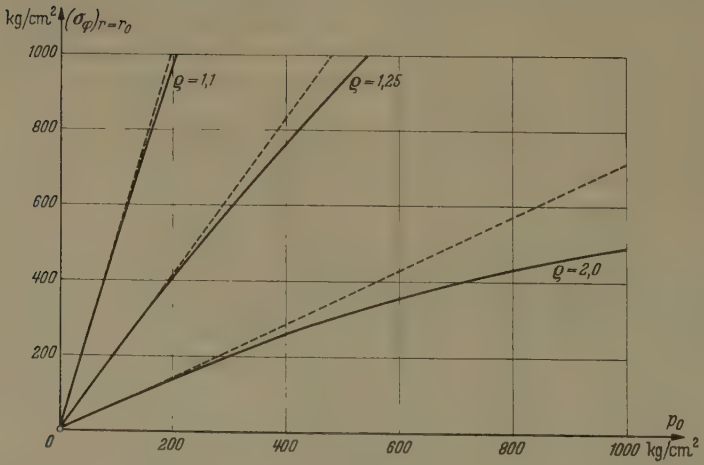
In Figur 5 ist die Verteilung der Radialspannung  $\sigma_r$  und der Tangentialspannung  $\sigma_\varphi$  für Kupfer von Ziffer 2 über dem Halbmesser aufgetragen, und zwar wieder für das Halbmesserverhältnis  $q = r_a/r_0 = 2,0$  und für den Innendruck  $p_0 = 1000 \text{ kg/cm}^2$ . Die Spannungswerte der linearen Theorie  $\sigma_r^*$  und  $\sigma_\varphi^*$  sind gestrichelt eingetragen. Man sieht auch hier, dass eine kleine Abweichung des Elastizitätsgesetzes von der Linearität eine recht erhebliche Verminderung des Wertes der Tangentialspannung am Innenrand verursacht. Figur 6 stellt die Abhängigkeit der Tangentialspannung  $\sigma_\varphi$  am Innenrand  $r = r_0$  vom Innendruck  $p_0$  graphisch dar. Die Abnahme der Tangentialspannung wird um so grösser, je grösser das Halbmesserverhältnis  $q = r_a/r_0$  ist, das heisst, je grösser die Spannungsspitze der linearen Theorie am Innenrand wäre.

<sup>1)</sup> F. JINDRA, Ing.-Arch. 22, 411 (1954).





Figur 5  
Spannungsverteilung in dickwandiger Hohlkugel.



Figur 6  
Änderung der Tangentialspannung am Innenrand für dickwandige Hohlkugel.

*Summary*

Using a general nonlinear elasticity law for small strain, solutions of some elastomechanic problems are stated depending on only one coordinate. If Cartesian coordinates are applied, the equations of the simple tensile test are immediately given, by which the two arbitrary functions of the nonlinear elasticity law can easily be determined. In cylindrical and polar coordinates, the stresses are calculated in thick tubes and thick hollow spheres subjected to a uniform internal pressure. Numerical examples demonstrate a considerable deviation of stress distribution from linear theory, especially at the boundary, so that the decrease of stress maximum known in technical practice can be explained by small deviations from linearity.

(Eingegangen: 5. August 1954.)

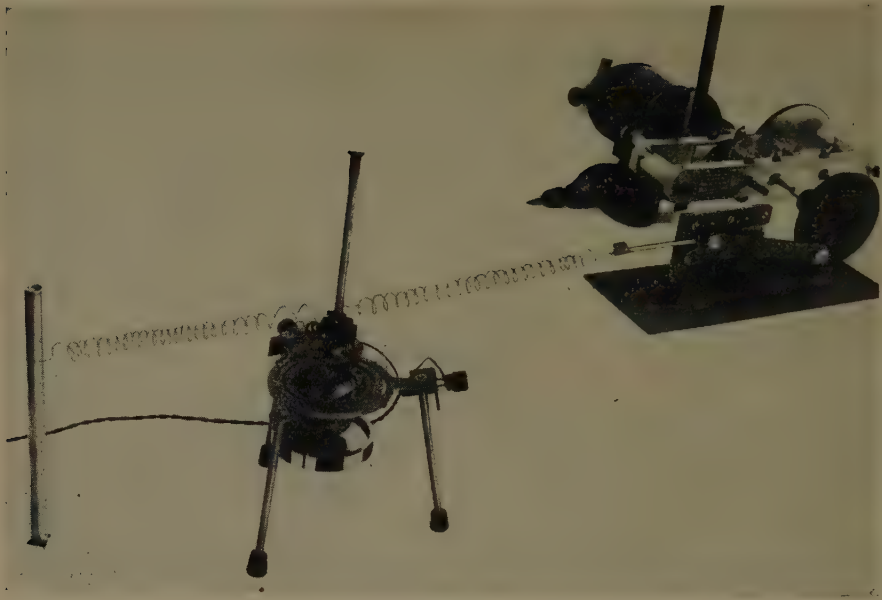
## Einfache Resonanzversuche am symmetrischen Kreisel

Von FRITZ KIRCHNER, Köln<sup>1)</sup>

Die wachsende Bedeutung gyromagnetischer Messmethoden in der modernen Atomphysik, von denen die eindrucksvollen Kernresonanzversuche von F. BLOCH und seinen Mitarbeitern am bekanntesten geworden sind, liess es wünschenswert erscheinen, das diesen Methoden zugrunde liegende physikalische Geschehen durch einen möglichst einfachen mechanischen Modellversuch anschaulich zu demonstrieren. Der Blochsche Kernresonanzversuch besteht bekanntlich in folgendem: Atomkerne, zum Beispiel Protonen, die ein bestimmtes mechanisches Impulsmoment und ein magnetisches Moment besitzen, führen in einem verhältnismässig starken magnetischen Feld eine Präzessionsbewegung aus, deren Frequenz durch ihr «gyromagnetisches Verhältnis» und die Feldstärke des magnetischen Feldes bestimmt ist. Lässt man auf die präzedierenden Atomkerne zusätzlich noch ein sehr schwaches magnetisches Wechselfeld quer zu dem konstanten Magnetfeld einwirken, dann erfolgt nunmehr die Präzession aller Atomkerne in gleicher Phase und lässt sich infolgedessen makroskopisch mit Hilfe einer Induktionsspule als rotierende Magnetisierung nachweisen, falls die Frequenz des zusätzlichen schwachen Wechselfeldes mit der Präzessionsfrequenz der Atomkerne übereinstimmt.

Nach verschiedenen Vorversuchen hat sich die in Figur 1 abgebildete Versuchsanordnung ergeben, mit der sich diese Erscheinungen in sehr einfacher Weise mechanisch veranschaulichen lassen. Ein symmetrischer Kreisel, der durch einen eingebauten kleinen Motor mit veränderlicher Umdrehungszahl angetrieben wird, ist in einer in der Institutswerkstatt hergestellten kardatischen Aufhängung befestigt, und zwar so, dass seine Figurenachse durch

<sup>1)</sup> I. Physikalisches Institut der Universität.



Figur 1

Versuchsanordnung zum Studium der erzwungenen Schwingungen des symmetrischen schweren Kreisels.

den Drehpunkt der Aufhängung hindurchgeht (Figur 1). Der Schwerpunkt des Kreisels fällt nicht mit dem Aufhängepunkt zusammen; seine Lage auf der Figurenachse kann aber mit Hilfe eines längs der Figurenachse verschiebbaren kleinen Zusatzgewichts in gewissen Grenzen verändert werden. Das von der Schwerkraft herrührende Drehmoment entspricht dem Drehmoment, das die Atomkerne im konstanten magnetischen Feld des Blochschen Versuchs infolge ihres magnetischen Moments erfahren. Die Schwerkraft verursacht eine Präzession der Kreiselachse, deren Umlaufgeschwindigkeit sich in bekannter Weise aus dem Quotienten der Beträge von Drehmoment und Impulsmoment ermitteln lässt (vgl. unten), die aber nach einiger Zeit infolge der Lagerreibung abklingt, wobei der Schwerpunkt seine tiefste Lage erreicht.

Mit einer in horizontaler Richtung gespannten und an der Figurenachse des Kreisels befestigten Spiralfeder (vgl. Figur 1) lässt man nun auf den Kiesel zusätzlich eine schwache, aber periodisch sich ändernde Kraft in horizontaler Richtung, also senkrecht zur Schwerkraft, einwirken; diese periodisch sich ändernde Federkraft entspricht dem magnetischen Wechselfeld des Blochschen Versuchs. Die periodische Spannung der Feder erfolgt mit Hilfe einer kleinen Exzentrerscheibe, die über ein Getriebe von einem Motor in Umlauf versetzt wird; die Umlauffrequenz, und damit auch die Frequenz der «erregenden



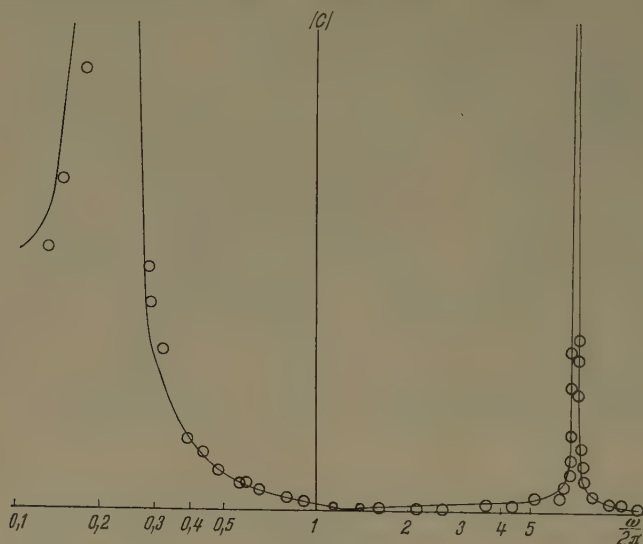
Kraft», lässt sich in weiten Grenzen ändern (zwischen etwa 0,1/s und 20/s). Die sich unter dem Einfluss der periodisch veränderlichen Kraft ausbildende erzwungene Präzessionsbewegung der Kreiselachse lässt sich zwar am Kreisel selbst ganz gut verfolgen. Um sie aber einem grösseren Auditorium sichtbar zu machen und um gleichzeitig auch die Phasenbeziehungen zwischen dieser Präzessionsbewegung und der erregenden Kraft demonstrieren zu können, ist auf der oberen Spitze des Kreisels und auf dem Schieber, an dem die Spannfeder befestigt ist, je ein kleines Spiegelchen angebracht. Die beiden Spiegelchen sind schwach gekrümmt (Galvanometerspiegel) und reflektieren aus dem Lichtkegel einer hellen Lampe je ein schmales Bündel heraus, so dass man auf dem Projektionsschirm in vergrössertem Maßstab den zeitlichen Ablauf der Präzessionsbewegung und der erregenden Kraft verfolgen kann.

Schon bei den Vorversuchen zeigte sich, dass ausser der Resonanzerscheinung, die dem Blochschcn Versuch entspricht, mit der beschriebenen Anordnung auch interessante Beobachtungen über die Phasenverhältnisse bei der erzwungenen Präzessionsbewegung gemacht werden können. Es erschien deshalb wünschenswert, parallel mit der weiteren Ausgestaltung der Versuche auch die Theorie der erzwungenen Schwingungen des symmetrischen Kreisels nicht nur für den Resonanzfall, sondern auf möglichst allgemeiner Grundlage auszubauen. Dieser Aufgabe hat sich R. WIEBELITZ unterzogen; er berichtet darüber im einzelnen im nächsten Aufsatz. An dieser Stelle soll deshalb nur eine kurze Übersicht über die Versuchsergebnisse gegeben werden, die man erhält, wenn man, etwa mit dem kleinstmöglichen Frequenzwert der erregenden Kraft anfangend, die Frequenz der Kraft langsam steigert. Wenn man wartet, bis eine etwa vorhandene Eigenpräzession abgeklungen ist, so besteht die schliesslich allein übrigbleibende «erzwungene Schwingung» stets darin, dass die Figurenachse des Kreisels auf einem elliptischen Kegel – im Resonanzfall auf einem Kreiskegel – präzediert. Solange die Frequenz der Erregung kleiner ist als die Frequenz der «Eigenpräzession», liegt die grössere Halbachse der Ellipse in der Richtung der erregenden Kraft<sup>1)</sup>; nach dem Passieren der Resonanzstelle kehrt sich das Verhältnis der beiden Halbachsen um, so dass nun die grössere Halbachse senkrecht zur erregenden Kraft liegt. Steigert man die Frequenz der Erregung weiter, so wird die Ellipse immer flacher und geht schliesslich in eine Gerade senkrecht zur erregenden Kraft über. Die kritische Frequenz, bei der also die Figurenachse des Kreisels nur noch senkrecht zur Krafrichtung hin und her pendelt, ist unabhängig von der Umlauffrequenz des Kreisels und stimmt mit der gewöhnlichen Pendelfrequenz des stillstehenden Kreisels überein<sup>2)</sup>. Steigert man die Frequenz der erregenden Kraft über diese kritische Frequenz hinaus, dann beschreibt das Ende der Figurenachse wieder eine Ellipse, die nun aber im entgegengesetzten Sinn durchlaufen wird

<sup>1)</sup> Bei den Versuchen rotiert der Kreisel stets in gleichem Sinne um seine Figurenachse.

<sup>2)</sup> Vgl. R. WIEBELITZ, im folgenden Aufsatz S. 362.

als vorher. Bei weiterer Steigerung der Frequenz der erregenden Kraft ergibt sich ein zweiter Resonanzfall, der der «Nutation» des Kreisels entspricht und bei dem die Figurenachse ihren Resonanzkreisegel im umgekehrten Sinne durchläuft als im ersten Resonanzfall. Bei noch höheren Frequenzen der erregenden Kraft geht der Präzessionskegel wieder in einen elliptischen Kegel



Figur 2

Maximaler Ausschlag  $\alpha$  der Figurenachse in Richtung der erregenden Kraft als Funktion der Erregungsfrequenz (O: Messwerte; ausgezogene Kurve: nach Gleichung (6) der folgenden Arbeit von WIEBELITZ berechnet; Werte der Konstanten:  $\Omega_1$  314 s<sup>-1</sup>,  $\Theta_1$  854 g cm<sup>2</sup>,  $\Theta_\perp$  6600 g cm<sup>2</sup>,  $G$  s 334000 dyn cm,  $k_1$  4,32 p,  $s_1$  5 cm).

über, wobei die grössere Halbachse der Ellipse wieder, wie im Gebiet der niedrigsten Erregerfrequenz, in der Richtung der erregenden Kraft liegt.

Figur 2 gibt das Ergebnis einer Versuchsreihe wieder, die WIEBELITZ in der oben angegebenen Weise durchgeführt hat. Als Abszisse ist dabei die Frequenz der erregenden Kraft aufgetragen, als Ordinate die Amplitude des Winkelausschlags in Richtung der erregenden Kraft, den die Figurenachse des Kreisels bei der erzwungenen Präzessionsbewegung der betreffenden Frequenz zeigt. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die gemessenen Werte recht gut mit den theoretisch berechneten (vgl. den folgenden Aufsatz von WIEBELITZ) übereinstimmen.

An dieser Stelle soll noch auf einen hübschen Versuch hingewiesen werden, der durch die theoretische Behandlung des Problems angeregt worden ist. Stellt man den Kiesel so auf, dass die Drehachsen der Kardanringe in der Ruhelage parallel und senkrecht zur Richtung der erregenden Kraft sind, und wählt

man die Erregerfrequenz so, dass bei freier Beweglichkeit aller Kardanringe nur eine Pendelung der Figurenachse in der Ebene senkrecht zur erregenden Kraft, also kein Ausschlag in Richtung der Kraft stattfindet, dann erhält man eine sehr ausgeprägte Resonanzpendelung in Richtung der Kraft, wenn man mit der Hand einen Kardanring so festhält, dass die Figurenachse in der Richtung senkrecht zur Kraft nicht mehr pendeln kann.

Die oben beschriebenen Versuche wurden bei der Physikertagung am 26. April 1954 in Goslar vorgeführt; gleichzeitig wurden die theoretischen Ergebnisse des folgenden Aufsatzes von WIEBELITZ mitgeteilt.

Bei den bisherigen Versuchen blieb die Richtung der erregenden Kraft konstant. Um die erzwungenen Schwingungen des Kreisels auch bei «zirkularer Erregung» zu studieren, wurde an der Kreiselachse eine zweite Spiralfeder befestigt und über die gleiche Exzentrerscheibe wie die erste Feder periodisch gespannt, aber so, dass ihre Kraft zwar auch in der Horizontalebene, aber senkrecht zu derjenigen der ersten Feder und mit einer Phasenverschiebung von  $\pm 90^\circ$  auf den Kreisel einwirkt. Bei dieser Art von Erregung erhält man je nach dem Umlaufsinn der Richtung der erregenden Kraft entweder nur den ersten oder nur den zweiten Resonanzfall, wie es ja nach dem tatsächlichen Bewegungsablauf bei linearer Erregung – entgegengesetzter Umlaufsinn in den beiden Resonanzfällen! – auch zu erwarten war.

Die genaueren Einzelheiten über die Abhängigkeit der Amplitude der erzwungenen Kreiselschwingungen von der Frequenz der Erregung und über die Phasenbeziehungen zwischen der erzwungenen Schwingung und der erregenden Kraft sind aus der ausführlichen Diskussion der Lösungen der Differentialgleichungen, durch die der Bewegungsablauf beschrieben wird, ersichtlich (vgl. die folgende Arbeit); dabei wird auch der Einfluss der Reibung – nur die Reibung in den Lagern der kardanischen Aufhängung, nicht die Reibung im Lager des Kreisels selbst, tritt bei den Versuchen in Erscheinung, da ja der Kreisel durch einen Motor angetrieben wird – näher untersucht. Im Hinblick auf den doch nicht ganz unbeträchtlichen mathematischen Aufwand, den die genauere theoretische Behandlung des Problems erfordert, mag hier aber noch darauf hingewiesen werden, dass man die beiden Resonanzfälle auch mit ganz elementaren Mitteln anschaulich interpretieren kann, wenn man sie, wie man es ja auch bei den gewöhnlichen erzwungenen Schwingungen tun kann, als «entdämpfte Eigenschwingungen» auffasst, deren Dämpfung eben durch die «erregende Kraft» gerade aufgehoben wird. Der erste Resonanzfall entspricht dann der gewöhnlichen Präzession des schweren symmetrischen Kreisels unter dem alleinigen Einfluss eines konstanten Drehmoments, das hier von der Schwerkraft herrührt; die Präzessionsfrequenz, die der «Larmorfrequenz» in der Atomphysik entspricht, ergibt sich unter der Annahme<sup>1)</sup>, dass der Dreh-

<sup>1)</sup> Diese Annahme ist mit grosser Näherung erfüllt, wenn der Kreisel hinreichend schnell um seine Figurenachse rotiert.



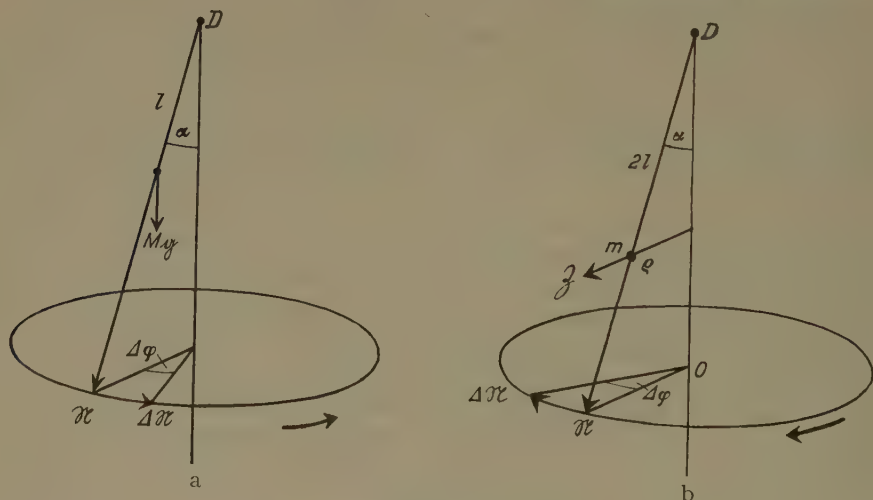
impulsvektor in Richtung der Figurenachse zeigt, in bekannter Weise (vgl. Figur 2) aus

$$\mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{N}}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\left| \frac{d\mathfrak{N}}{dt} \right|}{|\mathfrak{N}| \sin \vartheta}$$

zu

$$\Omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M g l \sin \vartheta}{N \sin \vartheta} = \frac{M g l}{N}. \quad (1)$$

Der zweite Resonanzfall, der der Nutation des symmetrischen Kreisels entspricht, lässt sich ebenfalls als Eigenschwingung anschaulich interpretieren. Um das Wesentliche dieser Art von Eigenschwingung des Kreisels mit einfachsten Mitteln zu erfassen, ist es zweckmässig, als schematische Darstellung ein Hantelmodell zu wählen (Figur 3). Die Hantelachse stelle die Figurenachse des Kreisels dar; die Hantel rotiere um irgendeine Achse, die durch den Punkt  $D$  der Figurenachse (Drehpunkt der kardanischen Aufhängung) hindurchgeht. Dann liefern die Zentrifugalkräfte (vgl. Figur 3) ein resultierendes Drehmoment, das stets senkrecht zur Kreiselachse, aber bei den in den beiden Figuren 2 und 3 angenommenen Verhältnissen *entgegengesetzt* zu dem im ersten Resonanzfall von der Schwerkraft herrührenden Drehmoment liegt. Das von den Zentrifugalkräften herrührende Drehmoment führt demnach *ceteris paribus* zu einem Umlauf der Kreiselachse auf einem Kreiskegel im umgekehrten Drehsinn als



Figur 3

Zur anschaulichen Ableitung der «Eigenfrequenzen» des schweren symmetrischen Kreisels; ( $\mathfrak{N}$  Drall um Figur-Achse); a:  $D$  Drehpunkt der kardanischen Aufhängung. b: «Hantelmodell» des symmetrischen Kreisels zur Veranschaulichung der Nutation:  $D$  Drehpunkt der kardanischen Aufhängung;  $mD$  Figurenachse des Kreisels;  $DO$  Nutationsachse;  $\mathfrak{Z}$  Zentrifugalkraft auf  $m$  als Ursache für die «Nutation». (Die zweite Teilmasse  $m$  der Hantel ist nur der Einfachheit halber in die Drehachse gelegt!)

im Falle der «Präzession» (erster Resonanzfall); dies ist die als Nutation bekannte Bewegung des kräftefreien symmetrischen Kreisels. Die Umlauffrequenz lässt sich in analoger Weise hinschreiben wie im ersten Resonanzfall; man hat dazu lediglich das von der Schwerkraft verursachte Drehmoment durch das Drehmoment zu ersetzen, das von den Zentrifugalkräften herrührt. Für unser Hantelmodell ergibt sich also:

$$|\mathfrak{M}| = m \Omega_N^2 \varrho \cdot 2 l \cos \vartheta$$

und

$$\Omega_N = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{|\mathfrak{M}|}{|\mathfrak{N}| \sin \vartheta} = \frac{m \Omega_N^2 (2 l)^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{N \sin \vartheta}$$

oder

$$\Omega_N = \frac{N}{m (2 l)^2 \cos \vartheta} \quad (2)$$

und  $\Omega_p \Omega_N = (m g l) / (m [2 l]^2 \cos \vartheta)$ , das heisst, das Produkt aus den beiden Resonanzfrequenzen ist unabhängig von der Kreiselfrequenz. Der im Nenner stehende Ausdruck  $m (2 l)^2$  ist aber das Trägheitsmoment  $\Theta_{\perp}$  des Kreisels um eine senkrecht zur Figurenachse durch den Drehpunkt  $D$  hindurchgehende Achse; anderseits ist  $m g l$  nichts anderes als das von der Schwerkraft  $m g$  herührende Direktionsmoment  $D_0$  des physischen Pendels, dessen Schwerpunkt den Abstand  $l$  vom Drehpunkt  $D$  hat. Für kleine Ausschläge gilt bekanntlich für die Frequenz  $\Omega_x$  des physischen Pendels:

$$\Omega_x^2 = \frac{D_0}{\Theta_{\perp}} = \frac{m g l}{m (2 l)^2}.$$

Wir erhalten demnach auf elementarem Wege die gleiche Beziehung

$$\Omega_p \Omega_N = \Omega_x^2,$$

die sich unten für kleine Ausschläge allgemein aus der Lösung der Differentialgleichung ergibt.

### Summary

Investigations are carried out on forced oscillations of a heavy symmetrical gyroscope—rotating with constant angular velocity about its axis of symmetry—as a function of an external linear or elliptical sinusoidal periodic force acting in horizontal direction on this gyroscope. The purpose of this work was to find a mechanic model for the phenomenon of nuclear induction. Experiments with the arrangement shown in figure 1 prove that the forced vibrations left over, after the natural vibrations have ceased, consist in a rotation of the body's axis on an elliptic cone. It is demonstrated how sense of rotation, orientation of the principal axis of the ellipse and phase difference between forced vibrations and acting external torque vary with frequency. Two frequencies of resonance are found, one at the natural frequency of precession and one at that of nutation, the first case corresponding to nuclear induction. An elementary calculation of the two frequencies of resonance is given.

(Eingegangen: 21. Mai 1954.)

## Zur Theorie der erzwungenen Schwingungen des symmetrischen Kreisels

Von RUDOLF WIEBELITZ, Köln<sup>1)</sup>

In der älteren Literatur hat man sich durchweg nur mit dem kräftefreien und dem schweren Kreisel beschäftigt, nicht aber mit Kreiselbewegungen unter der Einwirkung periodischer Kräfte. Erst in neuester Zeit ist dieses Problem ausführlich behandelt worden, und zwar von BRAUNBEK<sup>2)</sup>. Den Anlass dazu gaben die ganz analogen Vorgänge bei der Kerninduktion<sup>3)</sup>. Vorher hat lediglich SCHULER<sup>4)</sup> wiederholt darauf hingewiesen, dass sich selbst dieses Problem mit Hilfe einer von A. FÖPPL stammenden Näherungsmethode lösen liesse und dass es dabei 2 Resonanzstellen gebe.

Die vorliegende Arbeit ist von Herrn F. KIRCHNER angeregt, um die Theorie zu den in der vorstehenden Arbeit besprochenen Experimenten zu liefern. Sie beschränkt sich daher auf die Bewegungen des schweren symmetrischen Kreisels, der mit konstanter Geschwindigkeit um seine Figurenachse rotiert und auf den senkrecht zur Schwerkraft sinusförmige periodische Kräfte einwirken. Da die Untersuchungen von BRAUNBEK, soweit sie sich auf das vorliegende Problem beziehen (Fall II bei BRAUNBEK), sich auf Näherungen für den speziellen Fall des »schnellen« Kreisels ohne Berücksichtigung der Reibung und ohne Berücksichtigung der Nutation beschränken, dürfte es von Interesse sein, das Problem noch einmal mit anderen Methoden und in allgemeinerer Form zu behandeln.

### I. Beschränkung auf kleine Winkel

#### a) Das Differentialgleichungssystem

In dieser Arbeit soll ein sehr anschauliches Gleichungssystem benutzt werden, das von A. FÖPPL stammt<sup>5)</sup>: Mit Hilfe der Hauptträgheitsmomente  $\Theta_{||}$  und

<sup>1)</sup> I. Physikalisches Institut der Universität.

<sup>2)</sup> W. BRAUNBEK, *Der symmetrische Kreisel mit zeitlich periodischem Richtmoment*, ZAMM 33, 174–188 (1953).

<sup>3)</sup> Siehe vor allem F. BLOCH, W. W. HANSEN und M. PACKARD, *Nuclear Induction und The Nuclear Induction Experiment*, Phys. Rev. 70, 460–485 (1946). Ferner F. BLOCH und A. SIEGERT, Phys. Rev. 57, 522–527 (1940) und R. K. WANGSNES und F. BLOCH, Phys. Rev. 89, 728–739 (1953).

<sup>4)</sup> M. SCHULER, *Kreisellehre* (6. Kap. in Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, 11. Aufl. 1929, 1. Teil, 1. Band, S. 763–767), und M. SCHULER, *Einführung in die Mechanik*, Teil II (1951), S. 157–159.

<sup>5)</sup> A. FÖPPL, *Vorlesungen über technische Mechanik*, Bd. 4, 10. Aufl. (R. Oldenburg, München und Berlin 1944), S. 226–233; Bd. 6, 6. Aufl. (R. Oldenburg, München und Berlin 1944), S. 181–182.



$\Theta_{\perp}$  (parallel zur Figurenachse und  $\perp$  senkrecht dazu) lässt sich der Drehimpulsvektor  $\mathfrak{N}$  folgendermassen darstellen

$$\mathfrak{N} = \Omega_{\parallel} \Theta_{\parallel} \mathbf{n} + \Omega_{\perp} \Theta_{\perp} \mathbf{n}_{\perp} = \Omega_{\parallel} \Theta_{\parallel} \mathbf{n} + \Theta_{\perp} \left[ \mathbf{n}, \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right]^1 \quad (1)$$

( $\Omega_{\parallel}$ ,  $\Omega_{\perp}$  = Winkelgeschwindigkeitskomponenten,  $\mathbf{n}$  = Einheitsvektor in Richtung der Figurenachse,  $\mathbf{n}_{\perp}$  derjenige senkrecht dazu).

Die äusseren Drehmomente sollen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem  $(x, y, z)$  mit senkrechter  $z$ -Achse formuliert werden, dessen Mittelpunkt im Drehpunkt liegt. (Einheitsvektoren  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ). Zur Schwerkraft  $-m g \mathbf{k}$  ( $m$  = Kreiselmasse) tritt dabei eine sinusförmige Kraft, die in der Form  $k_1 \mathbf{j} \sin \omega t \pm k_2 \mathbf{i} \cos \omega t$  angesetzt wird. Das Vorzeichen ( $\pm$ ) gibt dabei den Umlaufsinn des Kraftvektors um die Figurenachse an. – Dabei sind folgende Sonderfälle zu unterscheiden: 1. lineare äussere Kraft (zum Beispiel  $k_2 = 0$ ), 2. zirkuläre Kraft ( $k_1 = k_2$ ) und 3. elliptische Kraft ( $k_{1,2}$  beliebig). Die zu diesen Kräften gehörigen Radiusvektoren seien:  $-s \mathbf{n}$  ( $|s|$  = Schwerpunktsabstand)<sup>2</sup>),  $s_1 \mathbf{n}$  und  $s_2 \mathbf{n}$ . Dann gilt unter Vernachlässigung der Reibung nach dem Drehimpulssatz

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{\parallel} \Theta_{\parallel} \frac{d\mathbf{n}}{dt} + \Theta_{\perp} \left[ \mathbf{n}, \frac{d^2 \mathbf{n}}{dt^2} \right] &= \pm k_2 s_2 [\mathbf{n}, \mathbf{i}] \cos \omega t + k_1 s_1 [\mathbf{n}, \mathbf{j}] \sin \omega t \\ &+ m g s [\mathbf{n}, \mathbf{k}]. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Dabei ist das Glied  $(d\Omega_{\parallel}/dt) \Theta_{\parallel} \mathbf{n}$  weggelassen worden, da im Experiment  $\Omega_{\parallel}$  durch den eingebauten Kreiselmotor konstant gehalten wurde<sup>3</sup>).

Division durch  $\Theta_{\perp}$  und Komponentenzerlegung ergibt das nichtlineare Differentialgleichungssystem für die Komponenten  $n_x$ ,  $n_y$  und  $n_z$  von  $\mathbf{n}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{N_{\parallel}}{\Theta_{\perp}} \dot{n}_x - n_z \ddot{n}_y + n_y \ddot{n}_z - \Omega_x^2 n_y &= -\frac{k_1 s_1}{\Theta_{\perp}} n_z \sin \omega t, \\ \frac{N_{\parallel}}{\Theta_{\perp}} \dot{n}_y + n_z \ddot{n}_x - n_x \ddot{n}_z + \Omega_x^2 n_x &= \pm \frac{k_2 s_2}{\Theta_{\perp}} n_z \cos \omega t, \\ \frac{N_{\parallel}}{\Theta_{\perp}} \dot{n}_z + n_x \ddot{n}_y - n_y \ddot{n}_x &= \frac{k_1 s_1}{\Theta_{\perp}} n_x \sin \omega t \mp \frac{k_2 s_2}{\Theta_{\perp}} n_y \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

( $N_{\parallel} = \Omega_{\parallel} \Theta_{\parallel}$  = Drehimpulskomponente um die Figurenachse,  $\Omega_x^2 = [m g s]/\Theta_{\perp}$ ).  $\Omega_x$  ist für  $s > 0$ <sup>2</sup>) gerade die Kreisfrequenz des Kreisels für den Fall, dass er, ohne zu rotieren, einfach als physikalisches Pendel schwingt.

<sup>1</sup>) Denn  $d\mathbf{n}/dt = [\vec{\Omega}, \mathbf{n}]$ , also  $[\mathbf{n}, d\mathbf{n}/dt] = [\mathbf{n}, [\vec{\Omega}, \mathbf{n}]] = \vec{\Omega} - \Omega_{\parallel} \mathbf{n}$ .

<sup>2</sup>) Wenn der Schwerpunkt unterhalb des Drehpunktes liegt, ist  $s$  also positiv, falls  $\mathbf{n}$  «nach oben» zeigt ( $n_z > 0$ ).

<sup>3</sup>) Ohne Berücksichtigung der Reibung wäre es unabhängig davon = 0, wie man durch skalare Multiplikation von (2) mit  $\mathbf{n}$  erkennt.

Dieses System vereinfacht sich wesentlich, wenn man sich auf «kleine Winkel», das heisst auf kleine Abweichungen der Figurenachse von der Vertikalen beschränkt. Dann weicht nämlich die Kugeloberfläche, auf der sich die Spitze von  $n$  bewegt, nur sehr wenig von der Ebene  $z = 1$  ab, und man kann näherungsweise  $n_z \approx 1$  setzen. Nach dem Vorbild von SCHULER sollen hier ferner  $n_x$  und  $n_y$  durch die Drehwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  der Figurenachse um die  $(+x)$ -Achse bzw. um die  $(+y)$ -Achse ersetzt werden. Legt man dabei fest, dass in der  $(xz)$ -Ebene  $\alpha = 0$  ist und in der  $(yz)$ -Ebene  $\beta = 0$ , so folgt

$$n_x \approx \sin \beta \approx \beta \quad \text{und} \quad n_y \approx -\sin \alpha \approx -\alpha.$$

Durch Einsetzen in (3) ergibt sich dann das System mit konstanten Koeffizienten:

$$\ddot{\alpha} + \Omega_x^2 \alpha + \frac{N_1}{\Theta_{\perp}} \dot{\beta} = -\frac{k_1 s_1}{\Theta_{\perp}} \sin \omega t; \quad \ddot{\beta} + \Omega_x^2 \beta - \frac{N_1}{\Theta_{\perp}} \dot{\alpha} = \pm \frac{k_2 s_2}{\Theta_{\perp}} \cos \omega t. \quad (4)$$

Nach SCHULER<sup>1)</sup> ist es ferner zweckmässig, statt  $\Theta_{\perp}$  zwei verschiedene Hauptträgheitsmomente  $\Theta_x$  und  $\Theta_y$  einzuführen<sup>2)</sup>.  $\Theta_x$  zum Beispiel ist dabei das Trägheitsmoment des Kreisels um die  $x$ -Achse für den Fall, dass die Figurenachse auf die  $(yz)$ -Ebene beschränkt ist.

Genau genommen muss ferner noch die Reibung berücksichtigt werden, die vor allem in den Lagern des kardanischen Gehänges zu suchen ist, während die Luftreibung demgegenüber klein ist. Setzt man die Lagerreibung proportional zur Winkelgeschwindigkeit an, so kommen auf der rechten Seite von (2) die Glieder  $-\sum_{m=1}^2 R_m ([\dot{n}, \dot{n}], n_m) n_m$  hinzu ( $n_m$  = Einheitsvektoren in Richtung der Kardanachsen). Bei Beschränkung auf kleine Winkel ergeben sich daraus auf der linken Seite von (4) die Zusatzglieder

$$\frac{R_1}{\Theta_x} \dot{\alpha} = q_1 \dot{\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \frac{R_2}{\Theta_y} \dot{\beta} = q_2 \dot{\beta}.$$

Unter Benützung der Abkürzungen

$$a_{1,2} = \frac{\Omega_{\perp} \Theta_{\perp}}{\Theta_{x,y}}; \quad \Omega_{x,y}^2 = \frac{m g s_{x,y}^3}{\Theta_{x,y}}; \quad b_{1,2} = \frac{k_{1,2} s_{1,2}}{\Theta_{x,y}},$$

wobei die jeweils ersten Indizes zusammengehören (und ebenso die jeweils zweiten) erhält man aus den allgemeinen Gleichungen SCHULERS<sup>1)</sup>

$$\ddot{\alpha} + \Omega_x^2 \alpha + q_1 \dot{\alpha} + a_1 \dot{\beta} = -b_1 \sin \omega t; \quad \ddot{\beta} + \Omega_y^2 \beta + q_2 \dot{\beta} - a_2 \dot{\alpha} = \pm b_2 \cos \omega t. \quad (5)$$

<sup>1)</sup> M. SCHULER, *Kreisellehre* (6. Kap. in Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, 11. Aufl. 1929, 1. Teil, 1. Band, S. 763–767), und M. SCHULER, *Einführung in die Mechanik*, Teil II (1951), S. 157–159.

<sup>2)</sup>  $\Theta_x$  und  $\Theta_y$  unterscheiden sich in den Trägheitsmomenten der jeweils mitbewegten Kardanringe und eventuell durch verschiedene Lagen der betreffenden Drehachsen (Abbildungen bei SCHULER).

<sup>3)</sup>  $s_x$  und  $s_y$  = Abstände des Schwerpunkts von den Drehachsen, meist ist  $s_x = s_y = s$ .

b) *Lineare periodische Kraft ohne Berücksichtigung der Reibung*

Die Gleichungen (4) stellen einen besonderen Fall der Differentialgleichungen für gekoppelte Schwingungen dar. Daher haben auch die Lösungen grosse Ähnlichkeit mit denjenigen bei Schwingungen. Für  $k_2 = 0$  lauten sie

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= C \sin \omega t + A \sin (\Omega_p t + \varphi) + B \sin (\Omega_n t + \psi) \\ \beta &= D \cos \omega t + A \operatorname{sign} (\Omega_{\parallel} \Omega_x^2) \cos (\Omega_p t + \varphi) - B \operatorname{sign} (\Omega_{\parallel}) \cos (\Omega_n t + \psi) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

mit

$$C = - \frac{\Omega_x^2 - \omega^2}{(\Omega_x^2 - \omega^2)^2 - (N_{\parallel}^2 / \Theta_{\perp}^2) \omega^2} \cdot \frac{k_1 s_1}{\Theta_{\perp}}; \quad D = - \frac{N_{\parallel} / \Theta_{\perp} \omega}{(\Omega_x^2 - \omega^2)^2 - (N_{\parallel}^2 / \Theta_{\perp}^2) \omega^2} \cdot \frac{k_1 s_1}{\Theta_{\perp}};$$

(sign = Vorzeichen, also  $\operatorname{sign} a = \pm 1$ , falls  $a \gtrless 0$ ;  $\Omega_p$  = Kreisfrequenz der Präzession,  $\Omega_n$  = diejenige der Nutation;  $A$ ,  $B$ ,  $\varphi$  und  $\psi$  sind die Integrationskonstanten).

Da die Eigenschwingungen – wie noch zu zeigen ist – durch die Reibung gedämpft und daher nach einer gewissen Zeit praktisch abgeklungen sind (wenigstens für  $s > 0$ ), ist es experimentell leicht möglich, die eigenschwingungsfreie erzwungene Schwingung [= stationäre Lösung; erstes Glied der rechten Seite von (5)] zu untersuchen. Die Figurenachse des Kreisels bewegt sich dabei im allgemeinen auf einem elliptischen Kegel, ihre Spitze also auf einer Ellipse. Dieser elliptischen Bewegung werden durch die Eigenschwingungen, nämlich durch die Präzession (2. Glied) und die Nutation (3. Glied), zwei kreisförmige Bewegungen überlagert. Diese Schwingungen sind bei der Föppl’schen Näherung alle unabhängig voneinander. – Wenn der Nenner der stationären Lösung verschwindet, liegt Resonanz vor. Das ist gerade bei den Eigenfrequenzen

$$\omega_{1,2} = \pm \Omega_p = \pm \left\{ - \frac{|N_{\parallel}|}{2 \Theta_{\perp}} + \sqrt{\frac{N_{\parallel}^2}{4 \Theta_{\perp}^2} + \Omega_x^2} \right\}$$
$$\omega_{3,4} = \pm \Omega_n = \pm \left\{ \frac{|N_{\parallel}|}{2 \Theta_{\perp}} + \sqrt{\frac{N_{\parallel}^2}{4 \Theta_{\perp}^2} + \Omega_x^2} \right\}$$

der Fall. Aus diesen Formeln ersieht man, dass  $\Omega_p \Omega_n = \Omega_x^2$  ist. Für schnelle Umdrehungen des Kreisels um seine Figurenachse, das heisst für grosse Werte von  $\Omega_{\parallel}$  und  $N_{\parallel}$ , wird näherungsweise

$$\Omega_p \approx \frac{\Omega_x^2 \Theta_{\perp}}{|N_{\parallel}|} = \frac{m g s}{|\Omega_{\parallel}| \Theta_{\parallel}}; \quad \Omega_n \approx \frac{|N_{\parallel}|}{\Theta_{\perp}} = \frac{|\Omega_{\parallel}| \Theta_{\parallel}}{\Theta_{\perp}}.$$

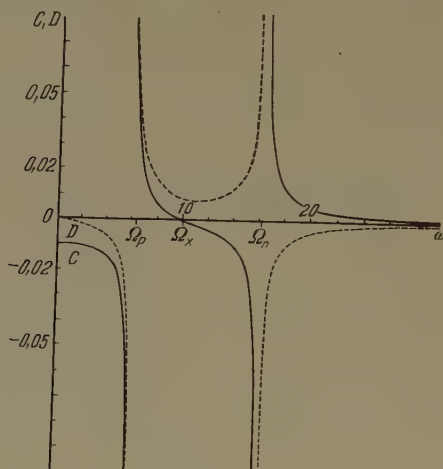
Aus  $\Omega_{\parallel} \rightarrow \infty$  folgt also auch  $\Omega_n \rightarrow \infty$ . Das wird der Grund sein, weshalb bei BRAUNBEK keine Resonanz mit der Nutation erwähnt wird.

Für den Fall, dass der Schwerpunkt oberhalb des Drehpunktes liegt ( $\Omega_x^2 < 0$ ), können die beiden Resonanzstellen zusammenfallen [für  $(N_{\parallel} / \Theta_{\perp})^2 = 4 |\Omega_x^2|$ ]



oder ganz verschwinden [für  $(N_{\parallel}/\Theta_{\perp})^2 < 4 [\Omega_x^2]$ ]. Doch ist in diesem Falle die experimentelle Untersuchung schwierig, da Präzessions-Eigenschwingungen kaum zu vermeiden sind, und diese – wie noch zu zeigen ist – unter dem Einfluss der Reibung exponentiell anwachsen.

Für die stationäre Lösung ergibt sich ferner aus den Amplituden  $|C|$  und  $|D|$  von  $\alpha$  und  $\beta$ , dass die Hauptachse der Ellipse für  $|\omega| < \Omega_p$  und  $|\omega| > \Omega_n$  in  $y$ -Richtung, also in Richtung der äusseren periodischen Kraft liegt, dagegen



Figur 1

Die Amplitudenfunktionen  $C$  (.....) und  $D$  (—) der stationären Schwingung in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz  $\omega$  der äusseren periodischen Kraft nach Formel (6). (Werte der Konstanten:  $\Omega_x = 10 \text{ sec}^{-1}$ ,  $N_{\parallel}/\Theta_{\perp} = 10 \text{ sec}^{-1}$ ,  $k_1 s_1/\Omega_{\perp} = 1 \text{ sec}^{-2}$ .)

für  $\Omega_p < |\omega| < \Omega_n$  quer dazu in  $x$ -Richtung. Der Umlaufsinn der Figuren-achse um die  $(+z)$ -Achse ergibt sich aus den Vorzeichen. Er ist positiv oder negativ, je nachdem  $\text{sign}\{\Omega_{\parallel}(\omega^2 - \Omega_x^2)\} = \pm 1$  ist. Für  $|\omega| < \Omega_x$  stimmt er mit dem Umlaufsinn der freien Präzession und für  $|\omega| > \Omega_x$  mit demjenigen der freien Nutation überein, wie aus den Vorzeichen der Eigenschwingungen ersichtlich ist. Dazwischen liegt der Fall der Querschwingung ( $\alpha = 0$ ), der erstaunlicherweise gerade für  $|\omega| = \Omega_x$  auftritt. Die Phasendifferenz zwischen äusserer periodischer Kraft und  $\alpha$ -Schwingung, die experimentell ebenfalls leicht zu untersuchen ist, ergibt sich auch aus den Vorzeichen. Sie ist 0 oder  $\pm\pi$ , je nachdem  $\text{sign}(-C) = \pm 1$  ist. An den Resonanzstellen und bei der Querschwingung gibt es daher Phasensprünge.

Den quantitativen Verlauf ersieht man aus Figur 1. Dabei geben die absoluten Beträge von  $C$  und  $D$  die Amplituden der betreffenden Winkel an, während die Vorzeichen die Phasenverhältnisse ausdrücken. Vorzeichenwechsel bedeuten also Phasensprünge.

Über die in der Arbeit von BRAUNBEK behandelten subharmonischen Resonanzen lässt sich auf Grund der hier besprochenen Näherung noch nichts aussagen, da diese nur die Grundschiwingung erfasst, nicht die Oberschwingungen.

c) *Elliptische periodische Kraft ohne Berücksichtigung der Reibung*

Für  $q_1 = q_2 = 0$  lauten die stationären Lösungen<sup>1)</sup> von (5)

$$\alpha_1 = -\frac{b_1 (\Omega_y^2 - \omega^2) \mp b_2 a_1 \omega}{(\Omega_x^2 - \omega^2) (\Omega_y^2 - \omega^2) - a_1 a_2 \omega^2} \sin \omega t$$

$$\beta_1 = -\frac{b_1 a_2 \omega \mp b_2 (\Omega_x^2 - \omega^2)}{(\Omega_x^2 - \omega^2) (\Omega_y^2 - \omega^2) - a_1 a_2 \omega^2} \cos \omega t.$$

Die stationäre Schwingung lässt sich also durch Überlagerung der beiden Schwingungen erklären, die durch die beiden periodischen Kräfte erzeugt werden, wenn sie einzeln wirken. Diese Einzelschwingungen entsprechen genau dem schon behandelten Fall (Abschnitt Ib), nur dass für  $\Omega_x^2 \neq \Omega_y^2$  und  $a_1 \neq a_2$  Unsymmetrien hineinkommen.

Beispiele: 1.  $0 < b_2 < b_1$ ;  $\Omega_y > 0$ ;  $\Omega_x^2 = \Omega_y^2 > 0$ ;  $a_1 = a_2 > 0$ ; positiver Umlaufsinn (oberes Vorzeichen). Die Resonanzstellen, das heisst die Nullstellen des Nenners, sind an den alten Stellen geblieben, doch die Querschwingungen haben sich verschoben. Es gibt jetzt zwei Arten von Querschwingungen: Entweder wird  $\alpha = 0$  (an den Stellen  $\omega = \Omega_\alpha$ ) oder  $\beta = 0$  (für  $\omega = \Omega_\beta$ ). Wenn  $b_2$  von 0 bis  $b_1$  wächst (für festes  $b_1$ ), so fällt  $\Omega_\alpha$  — wie man leicht nachrechnet — monoton von  $\Omega_x$  bis  $\Omega_p$ , während  $\Omega_\beta$  monoton von 0 bis  $\Omega_p$  wächst.

2. Zirkuläre äussere Kraft ( $b_1 = b_2$ ),  $\Omega_x^2 = \Omega_y^2$ ;  $a_1 = a_2$ . Die «Querschwingungen» fallen mit gewissen Resonanzstellen zusammen, so dass man kürzen kann:

$$\alpha_1 = -\frac{b_1}{\Omega_x^2 - \omega^2 \pm a_1 \omega} \sin \omega t; \quad \beta_1 = \pm \frac{b_1}{\Omega_x^2 - \omega^2 \pm a_1 \omega} \cos \omega t. \quad (7)$$

Es gibt also keine Querschwingungen mehr; die Kreiselspitze bewegt sich vielmehr durchweg auf einem Kreis. Wie man leicht nachrechnen kann, tritt dann und nur dann Resonanz für  $\omega = \pm \Omega_{p,n}$  ein, wenn die entsprechende Eigenschwingung denselben Umlaufsinn hat wie die äussere periodische Kraft.

d) *Elliptische periodische Kraft unter Berücksichtigung der Reibung*

Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (5) lautet:

$$\alpha = \frac{W_1}{W_3} \sin(\omega t + \delta) + A_1 e^{-A_p t} \sin(\Omega_p t + \varphi) + A_2 e^{-A_n t} \sin(\Omega_n t + \psi),$$

$$\beta = \frac{W_2}{W_3} \sin(\omega t + \epsilon) + B_1 e^{-A_p t} \sin(\Omega_p t + \varphi + \eta_1) + B_2 e^{-A_n t} \sin(\Omega_n t + \psi + \eta_2).$$

$W_3$  ist eine nach unten beschränkte Funktion, so dass die Amplituden an den Resonanzstellen nicht unendlich gross werden können.  $W_1$  und  $W_2$  hängen von  $b_1$  und  $b_2$  ab und können für sehr kleine Werte von  $b_{1,2}$  so klein werden, dass selbst die Resonanzstellen in den Bereich «kleiner Winkel» fallen.

<sup>1)</sup> Die dazugehörigen Eigenschwingungen sind von SCHULER (*Kreisellehre*) diskutiert.

Angaben zur stationären Lösung:

$$W_1 = \sqrt{[(\Omega_y^2 - \omega^2) b_1 \mp a_1 \omega b_2]^2 + \varrho_2^2 \omega^2 b_1^2},$$

$$W_2 = \sqrt{[(\Omega_x^2 - \omega^2) b_2 \mp a_2 \omega b_1]^2 + \varrho_1^2 \omega^2 b_2^2},$$

mit

$$W_3 = \sqrt{P^2 + Q_-^2 + 4 a_1 a_2 \varrho_1 \varrho_2 \omega^4}$$

$$Q_{(+)} = (\Omega_x^2 - \omega^2) \varrho_2 \omega_{(+)} (\Omega_y^2 - \omega^2) \varrho_1 \omega,$$

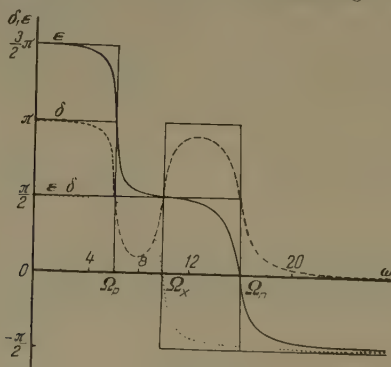
$$P = (\Omega_x^2 - \omega^2) (\Omega_y^2 - \omega^2) + \varrho_1 \varrho_2 \omega^2 - a_1 a_2 \omega^2.$$

Die Phasenwinkel sind bestimmt durch

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta &= \frac{1}{W_1 W_3} \{ [(\Omega_y^2 - \omega^2)^2 \varrho_1 + \varrho_1 \varrho_2^2 \omega^2 + a_1 a_2 \varrho_2 \omega^2] \omega b_1 \mp Q_+ a_1 \omega b_2 \}, \\ \sin \varepsilon &= - \frac{1}{W_2 W_3} \{ P a_2 \omega b_1 \mp [ [(\Omega_x^2 - \omega^2)^2 + \varrho_1^2 \omega^2] (\Omega_y^2 - \omega^2) \\ &\quad - a_1 a_2 (\Omega_x^2 - \omega^2) \omega^2 ] b_2 \}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$\mp \cos \delta$  erhält man aus dem Ausdruck für  $\sin \varepsilon$  und ebenso  $\pm \cos \varepsilon$  aus  $\sin \delta$ , wenn man alle Indizes 1 durch 2 sowie  $x$  durch  $y$  ersetzt, und umgekehrt. (Also  $W_1 \leftrightarrow W_2$ ,  $\Omega_x \leftrightarrow \Omega_y$ ,  $b_1 \leftrightarrow b_2$  usw.)

Für den Spezialfall  $\Omega_x = \Omega_y$ ,  $a_1 = a_2$ ,  $\varrho_1 = \varrho_2$  und  $b_2 = 0$  sind  $\delta$  und  $\varepsilon$  in Figur 2 graphisch dargestellt. Die geraden Streckenzüge entsprechen den Phasen



Figur 2

Die Phasenwinkel  $\delta$  (---) und  $\varepsilon$  (—) sowie ihre Differenz  $\varepsilon - \delta$  (.....) nach Formel (8). Die ausgezogenen geraden Linien deuten die Phasen ohne Berücksichtigung der Reibung an. (Werte der Konstanten:  $\Omega_x = \Omega_y = 10 \text{ sec}^{-1}$ ,  $a_1 = a_2 = 10 \text{ sec}^{-1}$ ,  $\varrho_1 = \varrho_2 = 1 \text{ sec}^{-1}$ ,  $b_2 = 0$ , also  $b_1$  beliebig  $\neq 0$ .)

ohne Berücksichtigung der Reibung<sup>1)</sup>. Wie bei der harmonischen Schwingung bewirkt die Reibung also auch hier, dass keine Phasensprünge auftreten. Zwischen dem grössten und dem kleinsten Wert von  $\varepsilon$  liegt eine Differenz von  $2\pi$ . Deshalb war die Angabe zweier Winkelfunktionen ( $\sin \varepsilon$  und  $\cos \varepsilon$ ) erforderlich, während man bei den harmonischen Schwingungen mit einer Angabe (meist  $\tan \varepsilon$ ) aus-

<sup>1)</sup> Zu  $\delta$  gehört zum Beispiel der Streckenzug  $(0, \pi)$ ,  $(\Omega_2, \pi)$ ,  $(\Omega_2, 0)$ ,  $(\Omega_x, 0)$ ,  $(\Omega_x, \pi)$ ,  $(\Omega_y, \pi)$ ,  $(\Omega_y, 0)$ ,  $(\infty, 0)$ .



kommt. Da durchweg  $\varepsilon - \delta \neq \pm 1/2 \pi$  ist, liegt die Ellipse, auf der sich die Spitze der Figurenachse bewegt, schief<sup>1)</sup>).

### Angaben zu den Eigenschwingungen:

Die Eigenfrequenzen  $\Omega_p$  und  $\Omega_n$  sind (wie bei den harmonischen Schwingungen) gegenüber dem reibungsfreien Fall verschoben. Ausserdem treten jetzt Dämpfungsexponenten  $A_p$  und  $A_n$  auf. Die Werte  $x_{1,2} = -A_p \pm i \Omega_p$  und  $x_{3,4} = -A_n \pm i \Omega_n$  sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$x^4 + (\varrho_1 + \varrho_2) x^3 + (a_1 a_2 + \varrho_1 \varrho_2 + \Omega_x^2 + \Omega_y^2) x^2 + (\varrho_1 \Omega_y^2 + \varrho_2 \Omega_x^2) x + \Omega_x^2 \Omega_y^2 = 0.$$

Natürlich lassen sich die Lösungen dieser Gleichung ohne weiteres explizit hinschreiben, aber im allgemeinen Fall nur in recht unübersichtlicher Form.

Die Grössen  $B_{1,2}$  und  $\eta_{1,2}$  sind keine Integrationskonstanten, sondern sind bestimmt durch  $B_{1,2} = A_{1,2} |U_{p,n}|$  bzw.  $\eta_{1,2} = \arg(U_{p,n})$ , wobei

$$U_{p,n} = \frac{a_2 (-A_{p,n} + i \Omega_{p,n})}{(-A_{p,n} + i \Omega_{p,n})^2 + \varrho_2 (-A_{p,n} + i \Omega_{p,n}) + \Omega_y^2}$$

ist. (Die jeweils ersten Indizes gehören zusammen.) Im allgemeinen bewegt sich also die Spitze der Figurenachse bei den Eigenschwingungen nicht mehr auf einem Kreis, sondern auf einer schiefen Ellipse. Nur für  $\Omega_x^2 = \Omega_y^2$ ,  $a_1 = a_2$ ,  $\varrho_1 = \varrho_2$  wird  $|U_{p,n}| = 1$ , also  $B_{1,2} = A_{1,2}$ , und  $\eta_1 = 1/2 \pi \operatorname{sign}(\Omega_1 \Omega_x^2)$ ,  $\eta_2 = -1/2 \pi \operatorname{sign}(\Omega_1)$ , so dass ähnliche Verhältnisse vorliegen wie ohne Berücksichtigung der Reibung.

Dies lässt sich leicht sehen, wenn man die  $x_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) ausrechnet, was allgemein für  $\Omega_x^2 = \Omega_y^2$  durchgeführt werden soll. Durch die Substitutionen  $x = \Omega_x^2 y$ ,  $z = y + (1/y)$  wird die charakteristische Gleichung auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt, aus welcher sich folgende Lösung ergibt

$$x_{1,\dots,4} = -\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{4} + \frac{\varepsilon_1}{4} \sqrt{T} + \frac{\varepsilon_2}{4} \sqrt{2(\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2a_1 a_2 - 8\Omega_x^2) - 2\varepsilon_1(\varrho_1 + \varrho_2)\sqrt{T}}$$

mit

$$T = (\varrho_1 - \varrho_2)^2 - 4a_1 a_2; \quad \varepsilon_{1,2} = \pm 1.$$

Für  $T \geq 0$  gibt es je nach Grösse des Radikanden der letzten Wurzel analog zur harmonischen Schwingung einen Schwing-, Grenz- oder Kriechfall. Für  $T < 0$  formt man besser etwas um und erhält

$$x_{1,\dots,4} = -\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{4} + \frac{\varepsilon_2}{4} \sqrt{-R + 2\sqrt{S}} + i \frac{\varepsilon_1}{4} \sqrt{-T} - i \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{4} \sqrt{R + 2\sqrt{S}}$$

mit

$$R = 8\Omega_x^2 + 2a_1 a_2 - \varrho_1^2 - \varrho_2^2$$

und

$$S = (4\Omega_x^2 + a_1 a_2 + \varrho_1 \varrho_2)^2 - 4\Omega_x^2 (\varrho_1 + \varrho_2)^2.$$

Für den Dämpfungsexponenten  $A_p$  erhält man daraus

$$A_p = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{-R + 2\sqrt{S}} \geq \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{-R + 2\sqrt{(4\Omega_x^2 + a_1 a_2 + \varrho_1 \varrho_2)^2}} = 0,$$

<sup>1)</sup> Abgesehen von der unmittelbaren Umgebung von  $|\omega| = \Omega_x$  ist das jedoch normalerweise im Experiment kaum zu merken, da der Reibungseinfluss meist viel geringer ist, als in Figur 2 (der Übersichtlichkeit halber) angenommen wurde.

je nachdem  $\Omega_x^2 \gtrless 0$ . Je nach der Lage des Schwerpunktes vergrößert oder verkleinert die Präzessionsreibung also die Amplitude der überlagerten Präzession exponentiell (vgl. Abschnitt I b).

### e) Festhalten eines Kardanringes

Aus dem System (5) lässt sich ferner die Kreiselbewegung leicht für den Fall berechnen, dass man den äusseren Kardanring festhält, so dass sich der Kreisel nur noch in einer Richtung bewegen kann. (Er hat dann also nur noch einen Freiheitsgrad.) Diese Richtung wird einfachheitshalber als Richtung einer Achse, zum Beispiel der  $x$ -Achse, angenommen. Dieser Fall entspricht dem Grenzübergang  $\Omega_y^2 \rightarrow \infty$ . Denn bei diesem Grenzübergang wird ja das konstante Drehmoment um die  $y$ -Achse so gross, dass sich der Kreisel nicht mehr um diese bewegen kann. Dividiert man die zweite Gleichung von (5) durch  $\Omega_y^2$  und führt den Grenzübergang durch, so folgt  $\beta = 0$ . Aus der ersten Gleichung aber ergibt sich die Gleichung der erzwungenen harmonischen Schwingung  $\ddot{\alpha} + \Omega_x^2 \alpha + \varrho_1 \dot{\alpha} = -b_1 \sin \omega t$ . Wegen der Beschränkung auf kleine Winkel ist dies gleichzeitig die Gleichung der erzwungenen Pendelschwingung des Kreisels für den Fall, dass dieser gar nicht rotiert. Für lineare periodische Kraft ( $b_2 = 0$ ) an der Stelle der Querschwingung erhält man daraus unter Vernachlässigung der Reibung folgendes interessante Ergebnis: Verhindert man die Querschwingung durch Festhalten des äusseren Kardanrings, so geht die Kreiselbewegung in eine Längsschwingung über, die sich sogar zur Resonanz aufschauelt.

## II. Exakte Behandlung der zirkularen periodischen Kraft ohne Berücksichtigung der Reibung

Die exakte Lösung des Systems (3) bereitet im allgemeinen grosse Schwierigkeiten. Für zirkuläre äussere periodische Kraft ( $k_1 = k_2 = k$ ;  $s_1 = s_2 = s$ ) erhält man jedoch eine einfache stationäre Lösung:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= \pm \frac{C_0}{\Omega_x^2 - C_0 \omega^2 \pm (N_{||}/\Theta_{\perp}) \omega} \cdot \frac{k s}{\Theta_{\perp}} \cos \omega t; \\ n_y &= \frac{C_0}{\Omega_x^2 - C_0 \omega^2 \pm (N_{||}/\Theta_{\perp}) \omega} \cdot \frac{k s}{\Theta_{\perp}} \sin \omega t; \quad n_z = C_0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Die Kreiselspitze beschreibt hierbei also durchweg einen Kreis. – Obwohl  $C_0$  eine Integrationskonstante des homogenen Systems (3) ist, kann es nicht beliebig gewählt werden, sondern muss aus der Zusatzbedingung

$$|\mathbf{n}|^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

berechnet werden, die besagt, dass  $\mathbf{n}$  ein Einheitsvektor ist. Daraus folgt die

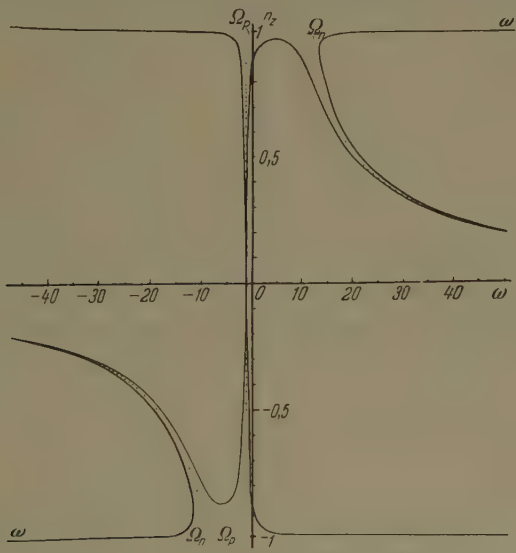
Gleichung vierten Grades für  $C_0$

$$\left(C_0 \frac{k s}{\Theta_{\perp}}\right)^2 = (1 - C_0^2) \left(\Omega_x^2 - C_0 \omega^2 \pm \frac{N_{\parallel}}{\Theta_{\perp}} \omega\right)^2.$$

Diese lässt sich wesentlich einfacher nach  $\omega$  auflösen als nach  $C_0$ :

$$\omega = \pm \frac{N_{\parallel}}{2 C_0 \Theta_{\perp}} + \varepsilon_2 \sqrt{\frac{N_{\parallel}^2}{4 C_0^2 \Theta_{\perp}^2} + \frac{\Omega_x^2}{C_0} - \varepsilon_1 \frac{k s}{\Theta_{\perp} \sqrt{1 - C_0^2}}} \tag{10a}$$

( $\varepsilon_{1,2} = \pm 1$ ). Eine mit Hilfe dieser Gleichung erhaltene Kurve zeigt Figur 3. Zu jedem Werte von  $\omega$  gibt es demnach 2 bzw. 4 Werte von  $C_0$ , das heisst, es gibt ebensoviele stationäre Lösungen. [Denn wenn man  $C_0$  kennt, berechnet man nach (9) auch leicht  $n_x$  und  $n_y$ .] – Die Zweige der Kurve in der Nähe von



Figur 3

Der konstante Wert  $n_x = C_0$  (—) der stationären Lösung in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz  $\omega$  der zirkularen äusseren Kraft nach Formel (10 a) und zum Vergleich dazu nach (10 b) der konstante Wert  $n_x = C$  der freien Präzession oder Nutation (.....) in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz  $\Omega_p$  bzw.  $\Omega_n$  der betreffenden Eigenschwingung. (Werte der Konstanten:  $N_{\parallel}/\Theta_{\perp} = 10 \text{ sec}^{-1}$ ,  $\Omega_x^2 = 10 \text{ sec}^{-2}$ ,  $k s/\Theta_{\perp} = 10 \text{ sec}^{-2}$ .)

$C_0 = \pm 1$  entsprechen der Näherungslösung (7). Dazu kommen jetzt noch die Resonanzkurven. Sie sind, wie es auch bei andern nichtlinearen erzwungenen Schwingungen der Fall ist, nach grösseren oder kleineren Frequenzen hin geneigt. Zwischen den beiden benachbarten Kurvenästen herrscht dabei eine Phasendifferenz von  $180^\circ$ , die im reibungsfreien Fall nicht überbrückt werden

kann, wenn man die Eigenschwingungen ausschaltet (was durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen möglich ist). Unter dieser Voraussetzung muss sich daher der Kreisel beim Durchgang durch die Präzessionsresonanz umkehren. Wenn die Spitze vorher nach oben zeigte, so zeigt sie nachher nach unten.

Zur Erläuterung der stationären Lösung sollen noch die freien Eigenfrequenzen<sup>1)</sup>, also die Lösungen des Systems (3), für  $k_1 = k_2 = 0$  angegeben werden<sup>2)</sup>. Für die Präzession lauten sie:

$$\begin{aligned} n_x &= +\sqrt{1 - C_p^2} \cos(\Omega_p t + \delta); \\ n_y &= -\sqrt{1 - C_p^2} \operatorname{sign}(\Omega_{\parallel} \Omega_x^2) \sin(\Omega_p t + \delta); \quad n_z = C_p. \end{aligned}$$

Die Gleichungen für die Nutation erhält man daraus, wenn man  $\Omega_p$  durch  $\Omega_n$  und die Konstanten  $C_p$  und  $\delta$  durch andere Konstanten  $C_n$  und  $\varepsilon$  ersetzt. Die Eigenfrequenzen  $\Omega_{p,n}$  sind dabei keine absoluten Konstanten, sondern hängen von  $n_z = C_{p,n}$  ab:

$$\Omega_{p,n} = \left| \mp \left| \frac{N_{\parallel}}{2 C_{p,n} \Theta_{\perp}} \right| + \sqrt{\frac{N_{\parallel}^2}{4 C_{p,n}^2 \Theta_{\perp}^2} + \frac{\Omega_x^2}{C_{p,n}}} \right|. \quad (10b)$$

(Das obere Vorzeichen und  $C_p$  gehören zu  $\Omega_{p,n}$ ) – Für grosse Werte von  $\Omega_{\parallel}$  (gross im Vergleich zu den andern Grössen) erhält man daraus unter Berücksichtigung von  $C_n = \cos \vartheta$  die Formeln (1) und (2) des vorigen Aufsatzes von F. KIRCHNER. – Trägt man  $C_{p,n}$  als Funktion von  $\Omega_{p,n}$  auf (siehe Figur 3), so liegen die erhaltenen Kurven gerade zwischen den Resonanzkurven der stationären Lösung. Der seltsame Verlauf der Resonanzkurven ist also durch die Eigenschwingungen bedingt.

### III. Zur Braunbekschen Näherungslösung

Für den Fall der linearen oder elliptischen periodischen Kraft bietet das System von FÖPPL grosse Schwierigkeiten, so dass man hier auf die von BRAUNBEK angegebene Näherungsmethode angewiesen ist<sup>3)</sup>.

Nach BRAUNBEK ist es fraglich, ob die von ihm angegebenen Reihen konvergieren. Durch eine Änderung der Rekursionsmethode ist es jedoch möglich, die Konvergenz unter geeigneten Bedingungen zu beweisen und gleichzeitig die Präzessionseigenschwingungen und die elliptische periodische Kraft mit zu erfassen. In Analogie zu BRAUNBEK soll in Gleichung (1) für grosse Werte von

<sup>1)</sup> Wegen der Nichtlinearität können diese Lösungen nicht einfach zu der partikulären Lösung addiert werden, um die allgemeine Lösung zu erhalten.

<sup>2)</sup> Vgl. A. FÖPPL, *Vorlesungen über technische Mechanik*, Bd. 6 (R. Oldenburg, München und Berlin 1944), S. 230 ff.

<sup>3)</sup> W. BRAUNBEK, *Der symmetrische Kreisel mit zeitlich periodischem Richtmoment*, ZAMM 33, 174–188 (1953).



$\Omega_{\parallel}$  das 2. Glied vernachlässigt werden, so dass  $n \approx \mathfrak{N}/(\Omega_{\parallel} \Theta_{\parallel})$  wird. Setzt man dies in (3) ein, dividiert durch  $N_{\parallel}/\Theta_{\perp}$  und setzt

$$\frac{k_2 s_2}{m g s} = \alpha, \quad \frac{\Omega_x^2 \Theta_{\perp}}{N_{\parallel}} = \Omega_p, \quad \frac{k_1 s_1}{k_2 s_2} = \beta,$$

so erhält man das Differentialgleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_x - \Omega_p N_y &= -\alpha \beta \Omega_p N_z \sin \omega t, & \dot{N}_y + \Omega_p N_x &= \pm \alpha \Omega_p N_z \cos \omega t, \\ \dot{N}_z &= \alpha \beta \Omega_p N_x \sin \omega t \mp \alpha N_y \Omega_p \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(BRAUNBEK schreibt  $P_x, \dots$  statt  $N_x, \dots$  und  $\omega_2$  statt  $\Omega_p$ ). Macht man den Ansatz (46) von BRAUNBEK<sup>1)</sup>, so erhält man die Gleichungssysteme

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_n - \Omega_p q_n &= -\beta \Omega_p r_{n-1} \sin \omega t; & \dot{q}_n + \Omega_p p_n &= \pm \Omega_p r_{n-1} \cos \omega t; \\ \dot{r}_n &= \beta \Omega_p p_{n-1} \sin \omega t \mp \Omega_p q_{n-1} \cos \omega t \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Für  $n = 0$  verschwindet die rechte Seite, und man erhält

$$p_0 = A_0 \cos(\Omega_p t + \delta), \quad q_0 = -A_0 \sin(\Omega_p t + \delta), \quad r_0 = C_0.$$

Entsprechend sieht allgemein die Lösung des homogenen Systems von (12) aus. Variation der Konstanten ergibt dann die Rekursionsformeln

$$\left. \begin{aligned} p_n &= \Omega_p \int_0^t r_{n-1} \{ -\beta \sin \omega x \cos \Omega_p(t-x) \pm \cos \omega x \sin \Omega_p(t-x) \} dx \\ &\quad + A_n \cos(\Omega_p t + \delta_n); \\ q_n &= \Omega_p \int_0^t r_{n-1} \{ \beta \sin \omega x \sin \Omega_p(t-x) \pm \cos \omega x \cos \Omega_p(t-x) \} dx \\ &\quad - A_n \sin(\Omega_p t + \delta_n); \\ r_n &= \Omega_p \int_0^t \{ \beta p_{n-1} \sin \omega x \mp q_{n-1} \cos \omega x \} dx + C_n. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Die Integrationskonstanten  $A_n$ ,  $\delta_n$  und  $C_n$  sollen so gewählt werden<sup>2)</sup>, dass auf den rechten Seiten keine Grössen  $\cos(\Omega_p t + \delta)$  bzw. in der letzten Gleichung keine Konstanten mehr vorkommen, falls  $n > 0$  ist. – Die ersten Glieder der

<sup>1)</sup> Entwicklung nach Potenzen von  $\alpha$ :  $N_x = \sum p_\nu \alpha^\nu$ ;  $N_y = \sum q_\nu \alpha^\nu$ ;  $N_z = \sum r_\nu \alpha^\nu$ .

<sup>2)</sup> Diese Festsetzung bedeutet keine Einschränkung, denn die Grössen, die jetzt wegfallen, würden lediglich einer Entwicklung von  $A_0$  bzw.  $C_0$  in Potenzreihen nach  $\alpha$  entsprechen.

Entwicklung erhält man hieraus leicht durch Einsetzen, zum Beispiel

$$p_1 = C_0 \Omega_p \frac{\beta \omega \mp \Omega_p}{\omega^2 - \Omega_p^2} \cos \omega t;$$

$$p_2 = -\frac{A_0 \Omega_p^2}{4} \left\{ \frac{\beta \pm 1}{\omega + \Omega_p} \cdot \frac{(2\omega + \Omega_p) \beta \mp \Omega_p}{(2\omega + \Omega_p)^2 - \Omega_p^2} \cos[(2\omega + \Omega_p)t + \delta] \right. \\ \left. + \frac{\beta \mp 1}{\omega - \Omega_p} \cdot \frac{(2\omega - \Omega_p) \beta \mp \Omega_p}{(2\omega - \Omega_p)^2 - \Omega_p^2} \cos[(2\omega - \Omega_p)t - \delta] \right\}.$$

Hierbei treten ausser den schon von W. BRAUNBEK behandelten Oberschwingungen also noch Summen- und Differenzschwingungen zwischen erzwungener Schwingung und Präzessionsschwingung auf. (Ob entsprechende Glieder auch bei der Nutation eine Rolle spielen, kann hier nicht entschieden werden, da die Braunbeksche Näherung ja grundsätzlich auf die Diskussion der Nutation verzichtet.) Diese Erscheinung ist zu vergleichen mit den Summations- und Differenztönen, die beim Auftreten zweier Schallwellen auf einen nicht-harmonischen Oszillator (zum Beispiel aufs Trommelfell) entstehen. Auch dort hat man es übrigens nach der Helmholtzschen Theorie mit nichtlinearen Gleichungssystemen zu tun.

Für das allgemeine Glied der Entwicklung kann man nun ansetzen:

$$\left. \begin{aligned} p_{2n-1} &= C_0 \sum_{\mu=0}^{n-1} A_{2n-1, 2\mu+1} \cos(2\mu+1) \omega t, \\ q_{2n-1} &= C_0 \sum_{\mu=0}^{n-1} B_{2n-1, 2\mu+1} \sin(2\mu+1) \omega t, \\ r_{2n-1} &= A_0 \sum_{\mu=0}^{n-1} C_{2n-1, 2\mu+1} \cos\{(2\mu+1)\omega + \Omega_p\}t + \delta\} \\ &\quad + C'_{2n-1, 2\mu+1} \cos\{(2\mu+1)\omega - \Omega_p\}t - \delta\}, \\ p_{2n} &= A_0 \sum_{\mu=1}^n A_{2n, 2\mu} \cos[2\mu\omega + \Omega_p]t + \delta] \\ &\quad + A'_{2n, 2\mu} \cos[2\mu\omega - \Omega_p]t - \delta], \\ q_{2n} &= A_0 \sum_{\mu=1}^n B_{2n, 2\mu} \sin[2\mu\omega + \Omega_p]t + \delta] \\ &\quad + B'_{2n, 2\mu} \sin[2\mu\omega - \Omega_p]t - \delta], \\ r_{2n} &= C_0 \sum_{\mu=1}^n C_{2n, 2\mu} \cos 2\mu \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Setzt man dies in die Rekursionsformeln (13) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
 p_{2n+1} &= \frac{C_0 \Omega_p}{2} \sum_{\mu=1}^n C_{2n, 2\mu} \left( \frac{\beta (2\mu+1) \omega \mp \Omega_p}{(2\mu+1)^2 \omega^2 - \Omega_p^2} \cos(2\mu+1) \omega t \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\beta (2\mu-1) \omega \pm \Omega_p}{(2\mu-1)^2 \omega^2 - \Omega_p^2} \cos(2\mu-1) \omega t \right), \\
 q_{2n+1} &= \frac{C_0 \Omega_p}{2} \sum_{\mu=1}^n C_{2n, 2\mu} \left( \frac{-\beta \Omega_p \pm (2\mu+1) \omega}{(2\mu+1)^2 \omega^2 - \Omega_p^2} \sin(2\mu+1) \omega t \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\beta \Omega_p \pm (2\mu-1) \omega}{(2\mu-1)^2 \omega^2 - \Omega_p^2} \sin(2\mu-1) \omega t \right), \\
 r_{2n+1} &= \frac{A_0 \Omega_p}{2} \sum_{\mu=1}^n (-\beta A_{2n, 2\mu} \pm B_{2n, 2\mu}) \frac{\cos\{[(2\mu+1) \omega + \Omega_p^x] t + \delta\}}{(2\mu+1) \omega + \Omega_p^x} \\
 &\quad + (\beta A_{2n, 2\mu} \pm B_{2n, 2\mu}) \frac{\cos\{[(2\mu-1) \omega + \Omega_p^x] t + \delta\}}{(2\mu-1) \omega + \Omega_p^x} \\
 &\quad + (A', B')\text{-Glieder,} \\
 p_{2n+2} &= \frac{A_0 \Omega_p}{2} \sum_{\mu=0}^n C_{2n+1, 2\mu+1} \frac{[(2\mu+2) \omega + \Omega_p^x] \beta \mp \Omega_p}{[(2\mu+2) \omega + \Omega_p^x]^2 - \Omega_p^2} \\
 &\quad \times \cos\{[(2\mu+2) \omega + \Omega_p^x] t + \delta\} - \frac{(2\mu \omega + \Omega_p^x) \beta \pm \Omega_p}{[(2\mu \omega + \Omega_p^x)^2 - \Omega_p^2]} \\
 &\quad \times \cos[(2\mu \omega + \Omega_p^x) t + \delta] + (C')\text{-Glieder,} \\
 q_{2n+2} &= \frac{A_0 \Omega_p}{2} \sum_{\mu=0}^n C_{2n+1, 2\mu+1} \frac{-\beta \Omega_p \pm [(2\mu+1) \omega + \Omega_p^x]}{[2(\mu+1) \omega + \Omega_p^x]^2 - \Omega_p^2} \\
 &\quad \times \sin\{[(2\mu+2) \omega + \Omega_p^x] t + \delta\} + \frac{\beta \Omega_p \pm (2\mu \omega + \Omega_p^x)}{(2\mu \omega + \Omega_p^x)^2 - \Omega_p^2} \\
 &\quad \times \sin[(2\mu \omega + \Omega_p^x) t + \delta] + (C')\text{-Glieder,} \\
 r_{2n+2} &= \frac{C_0 \Omega_p}{2} \sum_{\mu=0}^n - \frac{\beta A_{2n+1, 2\mu+1} \mp B_{2n+1, 2\mu+1}}{2(\mu+1) \omega} \cos 2(\mu+1) \omega t \\
 &\quad + \frac{\beta A_{2n+1, 2\mu+1} \pm B_{2n+1, 2\mu+1}}{2\mu \omega} \cos(2\mu \omega t) \quad (15)
 \end{aligned}$$

( $\Omega_p^x = \Omega_p$ ). Die ( $A', B'$ )-Glieder haben denselben Aufbau wie die unmittelbar davorstehenden Ausdrücke ( $A_0 \Omega_p / 2$ )  $\Sigma \dots$ ) und entstehen aus diesen, wenn

1) Die Glieder mit  $\frac{\sin}{\cos} \Omega_p t + \delta$ , und die Konstante in  $r_{2n+2}$  sind noch in diesen Formeln enthalten, werden aber durch die Integrationskonstanten zum Verschwinden gebracht.

man  $A_{k,1}$  durch  $A'_{k,1}$ ,  $B_{k,1}$  durch  $B'_{k,1}$ ,  $\Omega_p^w$  durch  $-\Omega_p^1$  und  $\delta$  durch  $-\delta$  ersetzt. Ebenso erhält man die  $(C')$ -Glieder aus den jeweils davorstehenden Summen durch dieselben Einsetzungen und  $C'_{k,1}$  statt  $C_{k,1}$ .

Zunächst ergibt sich mit Hilfe der Rekursionsformeln (15) durch vollständige Induktion, dass sich die  $p_m$ ,  $q_m$  und  $r_m$  ( $m \geq 1$ ) alle in der Form (14) darstellen lassen. Darüber hinaus lässt sich mit Hilfe von (15) die absolute Konvergenz der Reihen nachweisen. Definiert man zu diesem Zweck

$$P_m = \sum_{\mu=0}^m |A_{m,\mu}|, \quad Q_m = \sum_{\mu=0}^m |B_{m,\mu}|, \quad R_m = \sum_{\mu=0}^m |C_{m,\mu}|,$$

und schliesst man schmale Intervalle  $|(2n+1)\omega \pm \Omega_p| < A$  um die Resonanzstellen herum aus, so folgt aus (15)

$$P_{2n+1} \leq \frac{|\Omega_p| \operatorname{Max}(|\beta|, 1)}{A} R_{2n}, \quad Q_{2n+1} \leq \frac{|\Omega_p| \operatorname{Max}(|\beta|, 1)}{A} R_{2n},$$

$$R_{2n+2} \leq \frac{2|\Omega_p| \operatorname{Max}(|\beta|, 1)}{2 \cdot 2|\omega|} (P_{2n+1} + Q_{2n+1}) \leq M_1^2 R_{2n}$$

mit

$$M_1 = \frac{|\Omega_p| \operatorname{Max}(|\beta|, 1)}{\sqrt{A} \omega}.$$

Daraus ergibt sich nach dem Quotientenkriterium, dass  $\Sigma R_{2n} \alpha^{2n}$  für  $\alpha < M_1^{-1}$  konvergiert, und aus dem Majorantenkriterium folgt dann nach den obigen Abschätzungen auch die Konvergenz für  $\Sigma P_{2n+1} \alpha^{2n+1}$  und  $\Sigma Q_{2n+1} \alpha^{2n+1}$ , und die Reihen für die stationären Lösungen ( $A_0 = 0$ ):  $\Sigma p_{2n+1} \alpha^{2n+1}$  usw. konvergieren in diesem Gebiet absolut und in jedem abgeschlossenen Teilgebiet gleichmässig.

Für grosse Werte von  $|\omega|$ , etwa für  $|\omega| \geq |\Omega_p|/(1-\lambda)$  mit  $0 < \lambda < 1$ , kann man offensichtlich  $M_1$  durch  $M'_1 = M_1 \sqrt{A/(\lambda \omega)}$  ersetzen. Die Reihen konvergieren mit wachsendem  $|\omega|$  also immer besser.

Berücksichtigt man die Präzessionseigenschwingung, so muss man zusätzlich diejenigen Intervalle  $|m\omega \pm \Omega_p| \geq A$  ausschliessen, für die  $m$  gerade ist, da hier die Nenner der Summen- und Differenzschwingungen nicht nach unten beschränkt sind. Unter dieser Zusatzvoraussetzung folgt dann

$$R_{2n+1} \leq M^2 R_{2n-1} \quad \text{mit} \quad M = \frac{|\Omega_p| \operatorname{Max}(1, |\beta|)}{\sqrt{A} \operatorname{Min}(A, |\omega|)}.$$

Daraus ergibt sich die Konvergenz der  $A_0$ -Reihen und wegen  $M_1 \leq M$  die absolute Konvergenz der Gesamtreihen für  $\alpha < M^{-1}$ .

<sup>1)</sup> Die Glieder  $\Omega_p$  bleiben stehen.



Die Reihen konvergieren also, wenn  $\alpha$  klein genug ist, mit Ausnahme kleiner Umgebungen der Resonanzstellen und des Nullpunktes. Durch geeignete kleine Wahl von  $\alpha$  kann man in jedem vorgegebenen Punkt mit Ausnahme von  $\omega = 0$  und der Resonanzstellen selbst Konvergenz erzielen. Resonanzstellen sind dabei:

- |
1.  $|\omega| = |\Omega_p|$  für alle Schwingungen;

2.  $|\omega| = |\Omega_p|/(2n + 1)$  für die Ober-, Summen- und Differenzschwingungen von einer gewissen Ordnung ab;

3.  $|\omega| = |\Omega_p|/(2n)$  für die Differenz- und Summenschwingungen ab einer gewissen Ordnung.

Auch in der Nähe der Resonanzstellen kann natürlich die Amplitude nicht beliebig gross werden. Deshalb müssen immer  $A_0$  und  $C_0$  so gewählt werden, dass  $|\mathfrak{N}| = N_{||} = \text{const}$  ist. Von den drei Integrationskonstanten  $A_0$ ,  $C_0$  und  $\delta$  sind also nur noch zwei aus den Anfangsbedingungen bestimmbar.

In dem oben angegebenen Bereich der absoluten Konvergenz kann man die Reihen auch umordnen und zum Beispiel die Glieder mit gleichen Argumenten der Winkelfunktionen zusammenfassen. Die stationäre Lösung wird dann durch normale Fourier-Reihen dargestellt.

Summary

The object of this paper is to give a theory of the experiments described in the foregoing paper. The applied system of non-linear differential equations by A. FÖPPL is first solved approximately for 'small angles', that means small deviations of the axis of the gyroscope from the vertical direction, the cases without and with consideration of damping force being discussed separately. All characteristic features of the motion observed in the experiments are explained. — After that, an exact particular solution is given for the case of a circular periodic force. An approximate calculation is carried out for the case of a periodic elliptical force acting on a *fast* rotating gyroscope. The solution contains an infinite number of resonance frequencies (subharmonic resonances and resonances with sums and differences of the forced and natural frequencies).

(Eingegangen: 21. Mai 1954.)

# Sur la thermodynamique des processus irréversibles

Par KYRILLE POPOFF, Sofia<sup>1)</sup>

## Quatrième mémoire

Dans une série de publications [1], [2], [3]<sup>2)</sup> nous avons considéré la thermodynamique des processus irréversibles dans un système adiabatiquement isolé et nous avons établi que, dans ce cas, les relations phénoménologiques d'ONSAGER sont des intégrales premières d'un système d'équations différentielles du type newtonien, où l'expression de l'entropie, autour de l'état d'équilibre thermodynamique, joue le rôle d'une fonction potentielle des forces.

Dans ce qui suit nous allons considérer le cas important où le système échange de la chaleur avec le milieu ambiant, la température et la pression restant constantes et où la fonction  $\Phi$  joue le rôle d'une fonction potentielle des forces. Nous appliquons les résultats ainsi obtenus à la théorie des phases. Les développements mathématiques présentant une grande analogie avec les développements mathématiques de notre troisième mémoire cité, nous allons poursuivre ces recherches et tirer quelques résultats nouveaux, concernant les propriétés des intégrales des équations différentielles définissant les processus dans les deux cas. Enfin nous traitons la question des barrières énergétiques.

## Thermodynamique des processus irréversibles dans le cas où la température et la pression restent constantes

Considérons le cas où le système échange de la chaleur avec le milieu ambiant, la température et la pression restant constantes. Ces processus sont caractérisés par la fonction

$$\Phi = S - \frac{U + pV}{T}, \quad (1)$$

où  $S$  est l'entropie,  $U$  l'énergie totale interne,  $V$  le volume total,  $p$  la pression et  $T$  la température absolue du système. Dans ce cas  $\Phi$  croît d'une manière monotone et atteint son maximum à l'état de l'équilibre thermodynamique.

Soient  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  les variables, autres que  $T$  et  $p$ , définissant l'état du système, et  $\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0$  leurs valeurs à l'état d'équilibre. Posons

$$\Delta\Phi = \Phi(\xi) - \Phi(\xi^0) = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} g_{ik} x_i x_k, \quad \text{avec} \quad g_{ik} = g_{ki}, \quad x_i = \xi_i - \xi_i^0, \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Institut mathématique de l'Université de Sofia.

<sup>2)</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie, page 386.

où  $\sum g_{ik} x_i x_k$  est une forme quadratique définie positive. En suivant la méthode de notre troisième mémoire, sans apporter aucun changement, on montre que, dans ce cas encore, les relations phénoménologiques

$$x'_i = L_{i1} X_1 + L_{i2} X_2 + \dots + L_{in} X_n, \quad \text{avec} \quad X_i = \frac{\partial(-\Delta\Phi)}{\partial x_i}, \quad L_{ik} = L_{ki} \quad (3)$$

sont des intégrales premières du système

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

intégré des conditions  $x_i(+\infty) = 0$ .

De (4) on tire immédiatement

$$\frac{1}{2} (x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2) + \Delta\Phi = 0. \quad (5)$$

### Application à la théorie des phases, $T$ et $p$ restant constants

Avant de poursuivre notre exposition nous voulons rappeler une propriété des fonctions homogènes. Soit  $f(x, y)$  une fonction homogène de  $x$  et de  $y$  de degré  $m$ . On a, comme on le sait,

$$x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = m f(x, y).$$

On montre facilement que  $\partial f(x, y)/\partial x$ ,  $\partial f(x, y)/\partial y$  sont des fonctions homogènes de degré  $(m-1)$  et que par conséquent les secondes dérivées partielles de  $f(x, y)$  sont des fonctions homogènes de degré  $(m-2)$  et ainsi de suite.

Considérons maintenant un système de deux composants en deux phases, étudié par PLANCK [4] et soit

$$M_1 = M'_1 + M''_1, \quad M_2 = M'_2 + M''_2 \quad (6)$$

les masses  $M_1$  et  $M_2$  des composants, partagées parmi les phases (') et (").

La fonction caractérisant l'état du système est ici

$$\Phi = S - \frac{U + pV}{T}, \quad (1 \text{ bis})$$

où l'on a  $S = S' + S''$ ,  $U = U' + U''$ ,  $V = V' + V''$ . La température  $T$  et la pression  $p$  étant constantes et les mêmes pour les deux phases, l'on aura  $\Phi = \Phi' + \Phi''$ .

$S$ ,  $U$ ,  $V$  étant des fonctions homogènes de la masse du degré  $un$ , on a le même pour  $\Phi$ . De plus la composition relative de  $\Phi'$  étant la même pour  $M'_1$ ,  $M'_2$

et pour  $n M'_1, n M'_2$ ,  $\Phi'$  est une fonction homogène de degré  $un$  par rapport à  $M'_1$  et  $M'_2$ . Par conséquent

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial M'_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial M'_2}$$

sont de degré *nul* et

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M'^2_1}, \quad \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M'_1 \partial M'_2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M'^2_2}$$

de degré *moins un* ( $-1$ ) par rapport à  $M'_1, M'_2$ . On a ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi'}{\partial M'_1} &= \psi'_1 \left( \frac{M'_2}{M'_1} \right) = \psi'_1(c'), \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial M'_2} = \psi'_2(c'), \quad \frac{\partial \Phi''}{\partial M''_1} = \psi''_1(c''), \quad \frac{\partial \Phi''}{\partial M''_2} = \psi''_2(c'') \\ \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M'_1 \partial M'_2} &= \frac{1}{M'_1} \varphi'(c'), \quad \frac{\partial^2 \Phi''}{\partial M''_1 \partial M''_2} = \frac{1}{M''_1} \varphi''(c'') \end{aligned} \quad (7)$$

où l'on a mis

$$c' = \frac{M'_2}{M'_1}, \quad c'' = \frac{M''_2}{M''_1}.$$

D'autre part,  $\partial \Phi' / \partial M'_1$  étant une fonction homogène de degré *nul*, on obtient

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M'^2_1} = -\frac{M'_2}{M'^2_1} \varphi'(c'), \quad \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M'^2_2} = -\frac{M'_1}{M'^2_2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M'_1 \partial M'_2} = -\frac{1}{M'_2} \varphi'(c') \quad (8)$$

et de même

$$\frac{\partial^2 \Phi''}{\partial M''^2_1} = -\frac{M''_2}{M''^2_1} \varphi''(c''), \quad \frac{\partial^2 \Phi''}{\partial M''^2_2} = -\frac{1}{M''_2} \varphi''(c''). \quad (9)$$

Formons après cela  $\Delta \Phi$ . En posant

$$\Phi(M_1, M_2) = \Phi'(M'_1, M'_2) + \Phi''(M''_1, M''_2)$$

et en tenant compte de ce que

$$\delta M'_1 = -\delta M''_1 = m_1, \quad \delta M'_2 = -\delta M''_2 = m_2$$

on obtient d'abord, en choisissant pour  $M'_1, M'_2, M''_1, M''_2$  les valeurs de ces variables correspondant à l'état de l'équilibre thermodynamique,

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial M'_1} - \frac{\partial \Phi''}{\partial M''_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial M'_2} - \frac{\partial \Phi''}{\partial M''_2} = 0. \quad (10)$$

Ces équations, qu'on peut écrire aussi, ayant égard à (7), sous la forme

$$\psi'_1(c') - \psi''_1(c'') = 0, \quad \psi'_2(c') - \psi''_2(c'') = 0 \quad (11)$$

déterminent les concentrations  $c', c''$  à l'état de l'équilibre thermodynamique.



Ainsi, autour de l'équilibre thermodynamique, l'on obtient

$$\Delta\Phi = + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M_1'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M_1''^2} \right) \delta M_1'^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M_1' \partial M_2'} + \frac{\partial^2 \Phi''}{\partial M_1'' \partial M_2''} \right) \right. \\ \left. \times \delta M_1' \delta M_2' + \left( \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial M_2'^2} + \frac{\partial^2 \Phi''}{\partial M_2''^2} \right) \delta M_2'^2 \right] + \dots \\ = \frac{1}{2} \left\{ - \left[ \frac{M_2}{M_1'^2} \varphi'(c') + \frac{M_2''}{M_1''^2} \varphi''(c'') \right] m_1^2 \right. \\ \left. + 2 \left[ \frac{1}{M_1'} \varphi'(c') + \frac{1}{M_1''} \varphi''(c'') \right] m_1 m_2 \right. \\ \left. - \left[ \frac{1}{M_2} \varphi'(c') + \frac{1}{M_2''} \varphi''(c'') \right] m_2^2 \right\} + \dots \\ = \frac{1}{2} \left[ - M_2' \varphi'(c') \left( \frac{m_1}{M_1'} - \frac{m_2}{M_2'} \right)^2 - M_2'' \varphi''(c'') \left( \frac{m_1}{M_1''} - \frac{m_2}{M_2''} \right)^2 \right]. \quad (12)$$

( $-\Delta\Phi$ ) étant une forme quadratique, positivement définie, on voit d'ici que  $\varphi'(c')$  et  $\varphi''(c'')$  sont positifs.

Avec cette expression de  $\Delta\Phi$  les équations (4) deviennent

$$\frac{d^2 m_1}{dt^2} = \frac{\partial(-\Delta\Phi)}{\partial m_1} = \left[ \frac{M_2'}{M_1'^2} \varphi'(c') + \frac{M_2''}{M_1''^2} \varphi''(c'') \right] m_1 - \left[ \frac{\varphi'(c')}{M_1'} + \frac{\varphi''(c'')}{M_1''} \right] m_2, \\ \frac{d^2 m_2}{dt^2} = \frac{\partial(-\Delta\Phi)}{\partial m_2} = - \left[ \frac{\varphi'(c')}{M_1'} + \frac{\varphi''(c'')}{M_1''} \right] m_1 + \left[ \frac{\varphi'(c')}{M_2'} + \frac{\varphi''(c'')}{M_2''} \right] m_2. \quad (13)$$

( $-\Delta\Phi$ ) étant une forme quadratique positivement définie, les racines  $r_1^2, r_2^2$  de l'équation algébrique en  $r^2$

$$\begin{vmatrix} \frac{M_2'}{M_1'^2} \varphi'(c') + \frac{M_2''}{M_1''^2} \varphi''(c'') - r^2 & - \left( \frac{\varphi'(c')}{M_1'} + \frac{\varphi''(c'')}{M_1''} \right) \\ - \left( \frac{\varphi'(c')}{M_1'} + \frac{\varphi''(c'')}{M_1''} \right) & \frac{\varphi'(c')}{M_2'} + \frac{\varphi''(c'')}{M_2''} - r^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

sont positives et par conséquent deux des racines de cette équation en  $r$  sont négatives et les deux autres positives. Soient

$$r_1 < r_2 < 0, \quad r_3 = -r_1, \quad r_4 = -r_2.$$

Les intégrales de (13) vérifiant les conditions

$$\lim m_1(t) = 0, \quad \lim m_2(t) = 0 \quad \text{pour } t \rightarrow +\infty$$

sont de la forme

$$m_1 = c_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad m_2 = C_1 \beta_1 e^{r_1 t} + C_2 \beta_2 e^{r_2 t}, \quad (15)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont définies par les conditions initiales

$$t = 0, \quad m_1^0 = C_1 + C_2, \quad m_2^0 = C_1 \beta_1 + C_2 \beta_2.$$

Pendant la durée du processus l'on aura, suivant (5),

$$\left(\frac{dm_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm_2}{dt}\right)^2 = -2 \Delta\Phi. \quad (16)$$

L'élimination de  $C_1 e^{r_1 t}$ ,  $C_2 e^{r_2 t}$  des équations (15) et de l'expression de  $dm'/dt$  d'un part et de  $dm_2/dt$  d'autre part conduit aux relations phénoménologiques avec  $L_{12} = L_{21}$ .

Après tout ce que nous avons dit dans nos mémoires précédants il est superflu de donner les expressions explicites de  $m_1$ , de  $m_2$  et des relations phénoménologiques correspondantes, l'intégration du système (13) ne présentant aucune difficulté.

Considérons le cas spécial où la seconde phase ne contient que le composant  $M_1$ , c'est-à-dire où l'on a  $M_2'' = 0$ ,  $M_2' = M_2$ . Dans ce cas l'on a

$$m_2 = \delta M_2' = -\delta M_2'' = 0, \quad \frac{\partial \Phi''}{\partial M_2''} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi''}{\partial M_1'' \partial M_2''} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi''}{\partial M_2''^2} = 0.$$

De

$$\frac{\partial \Phi''}{\partial M_1''} M_1'' + \frac{\partial \Phi''}{\partial M_2''} M_2'' = \Phi''$$

on tire

$$\Phi'' = C M_1'', \quad \frac{\partial \Phi''}{\partial M_1''} = C = \text{const.}$$

Les équations

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial M_1'} - \frac{\partial \Phi''}{\partial M_1''} = 0, \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial M_2'} - \frac{\partial \Phi''}{\partial M_2''} = 0,$$

déterminant l'état de l'équilibre thermodynamique deviennent maintenant

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial M_1'} = C, \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial M_2'} = 0$$

et l'équation (12), en négligeant les termes de degré  $> 2$  en  $m_1$  et  $m_2$ , devient

$$\Delta\Phi = -\frac{1}{2} \cdot \frac{M_2}{M_1'^2} \varphi'(c') m_1^2.$$

Ainsi le système (13) se réduit dans ce cas à l'équation unique

$$\frac{d^2 m_1}{dt^2} = \frac{M_2}{M_1'^2} \varphi'(c') m_1. \quad (17)$$

Intégrée dans les conditions de limite  $m_1(+\infty) = 0$ , cette équation donne

$$m_1 = C e^{-\sqrt{(M_2/M_1'^2) \varphi'(c')} t}, \quad \frac{dm_1}{dt} = -m_1 \sqrt{\frac{M_2}{M_1'^2} \varphi'(c')}.$$

### Propriétés des intégrales des systèmes du type (4)

Nous avons vu que le système (4), caractérisant des processus irréversibles dans le cas où  $T$  et  $p$  restent constantes est du même type que le système d'équations différentielles correspondant au cas d'un système adiabatiquement isolé. Dans les deux cas les forces  $X_i$  proviennent des formes quadratiques positivement définies, soit de

$$P = \frac{1}{2} \sum_{ik} g_{ik} x_i x_k, \quad \text{avec} \quad g_{ik} = g_{ki}. \quad (18)$$

Ainsi tous ce qui va suivre se rapporte aux deux cas et aux cas analogues se présentant dans l'étude des processus thermodynamiques irréversibles.

Souvent on sera obligé de donner des poids différents aux forces  $X_i$ . Ainsi, par exemple, dans l'étude de l'osmose le passage des molécules à travers une paroi poreuse dépend, entre autre, du parcours moyen des molécules, ce qui cause une sélection des masses. Ici encore nous nous bornons au cas de deux variables indépendantes pour mettre au claire l'influence du poids sur la forme des relations phénoménologiques.

Considérons le système d'équations différentielles

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \frac{\partial P}{\partial x_1} = g_{11} x_1 + g_{12} x_2 = X_1, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \lambda \frac{\partial P}{\partial x_2} = \lambda g_{21} x_1 + \lambda g_{22} x_2 = \lambda X_2, \quad \text{avec} \quad \lambda > 0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

et les intégrales correspondant aux conditions de limites

$$\lim x_1(t) = 0, \quad \lim x_2(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \rightarrow +\infty.$$

En posant

$$x_1 = e^{rt}, \quad x_2 = \beta e^{rt}$$

on est conduit, pour la détermination de  $r$  et de  $\beta$ , aux équations

$$g_{11} - r^2 + \beta g_{12} = 0, \quad \lambda g_{21} + \beta (\lambda g_{22} - r^2) = 0, \quad (20)$$

d'où l'on tire pour  $r^2$  l'équation

$$\begin{vmatrix} g_{11} - r^2 & g_{12} \\ \lambda g_{21} & \lambda g_{22} - r^2 \end{vmatrix} = r^4 - r^2 (\lambda g_{22} + g_{11}) + \lambda (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) = 0, \quad (21)$$

ce qui donne

$$r_{1,2}^2 = \frac{g_{11} + \lambda g_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{11} - \lambda g_{22}}{2}\right)^2 + \lambda g_{12}^2}. \quad (22)$$

Pour  $\lambda = 0$  la valeur de l'expression sous le signe du radical est positive. Cette expression ne s'annule pour aucune valeur réelle de  $\lambda$  tant que  $g_{12} \neq 0$ .

En effet de

$$\left( \frac{g_{11} - \lambda g_{22}}{2} \right)^2 + \lambda g_{12}^2 = 0, \quad (23)$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$\lambda^2 g_{22} - 2\lambda (g_{11} g_{22} - 2g_{12}^2) + g_{11}^2 = 0,$$

on tire

$$\lambda_{1,2} = \frac{g_{11} g_{22} - 2g_{12}^2 \pm \sqrt{g_{12}^2 - g_{11} g_{22}}}{g_{22}^2}. \quad (24)$$

Or comme  $g_{11} x_1^2 + 2g_{12} x_1 x_2 + g_{22} x_2^2$  est une forme quadratique positivement définie, l'on a

$$g_{11} g_{22} - g_{12}^2 > 0, \quad g_{11} > 0, \quad g_{22} > 0.$$

1° Dans le cas où  $g_{12} = 0$  les équations (19) se réduisent à

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = g_{11} x_1, \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \lambda g_{22} x_2 \quad (25)$$

et les relations phénoménologiques correspondantes deviennent

$$x'_1 = L_{11} X_1, \quad x'_2 = L_{22} X_2$$

d'où  $L_{12} = L_{21} = 0$ .

2° Dans le cas où  $g_{12} \neq 0$  la valeur de l'expression sous le signe du radical de (24) sera négative;  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  seront complexes et par conséquent les racines  $r_1^2, r_2^2$  déterminées par (22) seront réelles et positives pour  $\lambda > 0$ , comme on s'en rend compte en écrivant (22) sous la forme

$$r_{1,2}^2 = \frac{g_{11} + \lambda g_{22}}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{g_{11} + \lambda g_{22}}{2} \right)^2 - \lambda (g_{11} g_{22} - g_{12}^2)}.$$

Ainsi les quatre racines de (21) sont réelles:

$$r_1 < 0, \quad r_2 < 0, \quad r_3 = -r_1, \quad r_4 = -r_2.$$

Comme dans le processus physique on a  $\lim x_1 = \lim x_2 = 0$  pour  $t \rightarrow +\infty$ , il faut mettre  $C_3 = C_4 = 0$  et prendre les intégrales du système (19) sous la forme

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} & x'_1 &= C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t} \\ x_2 &= C_1 \beta_1 e^{r_1 t} + C_2 \beta_2 e^{r_2 t} & x'_2 &= C_1 r_1 \beta_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 \beta_2 e^{r_2 t} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Avec ces valeurs de  $x_1$  et  $x_2$  on obtient pour les expressions de  $X_1$  et  $X_2$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= g_{11} x_1 + g_{12} x_2 = C_1 e^{r_1 t} (g_{11} + g_{12} \beta_1) + C_2 e^{r_2 t} (g_{11} + g_{12} \beta_2), \\ X_2 &= g_{12} x_1 + g_{22} x_2 = C_1 e^{r_1 t} (g_{12} + g_{22} \beta_1) + C_2 e^{r_2 t} (g_{12} + g_{22} \beta_2). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$



L'élimination de  $C_1 e^{r_1 t}$ ,  $C_2 e^{r_2 t}$  des expressions de  $x'_1$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  d'une part et des expressions de  $x'_2$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  d'autre part conduit aux relations phénoménologiques

$$x'_i = L_{i1} X_1 + L_{i2} X_2, \quad i = 1, 2.$$

En suivant le chemin de notre premier et troisième mémoire on trouve  $L_{12} = L_{21}$ . Dans le cas de racines doubles l'expression sous le signe de radical de (22) doit être nulle et par conséquent l'on aura  $g_{12} = 0$ . Les équations (19) se réduisent aux équations (25) déjà considérées.

### Les barrières énergétiques envisagées au point de vue de la théorie des processus irréversibles

La théorie des processus irréversibles exposée dans ce travail éclaire d'une manière nouvelle la question des barrières énergétiques. Pour ne pas compliquer l'exposition considérons le cas  $n = 2$ . Les équations (4) s'écrivent dans ce cas

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = g_{11} x_1 + g_{12} x_2, \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = g_{21} x_1 + g_{22} x_2, \quad \text{avec } g_{12} = g_{21}. \quad (4 \text{ bis})$$

L'intégration de ces équations par des expressions de la forme  $x_1 = \alpha e^{r t}$ ,  $x_2 = \beta e^{r t}$  donne pour

$$\alpha = g_{12}, \quad \beta = -(g_{11} - r^2).$$

En désignant par  $r_1$  et  $r_2$  les deux racines négatives l'on a pour les intégrales s'annulant pour  $t = +\infty$

$$x_1 = C_1 g_{12} e^{r_1 t} + C_2 g_{12} e^{r_2 t}, \quad x_2 = -C_1 (g_{11} - r_1^2) e^{r_1 t} - C_2 (g_{11} - r_2^2) e^{r_2 t}.$$

En désignant par  $x_1^0$ ,  $x_2^0$  les valeurs de  $x_1$ ,  $x_2$  pour  $t = 0$ , on aura pour déterminer les constantes d'intégration  $C_1$ ,  $C_2$  les équations

$$x_1^0 = C_1 g_{12} + C_2 g_{12}, \quad x_2^0 = -C_1 (g_{11} - r_1^2) - C_2 (g_{11} - r_2^2).$$

Les valeurs de  $C_1$  et  $C_2$  ainsi déterminées donnent, en général, pour les dérivées  $dx_1/dt$ ,  $dx_2/dt$  au moment  $t = 0$  des valeurs différentes de zéro. Pour que la valeur de  $dx_1/dt$ , par exemple, soit nulle au moment  $t = 0$  il faut qu'on ait de plus

$$0 = C_1 r_1 g_{12} + C_2 r_2 g_{12}.$$

Par conséquent, pour que les trois dernières équations soient compatibles il faut qu'on ait

$$\frac{x_1^0}{x_2^0} = -\frac{g_{12}}{g_{11} - r_1 r_2}.$$

On trouve de même pour que le flux de  $x_2$  au commencement soit nul la condition

$$\frac{x_1^0}{x_2^0} = - \frac{g_{22} - r_1 r_2}{g_{12}} \text{ doit être satisfaite.}$$

Dans le cas de  $n > 2$  on pourrait avoir des barrières correspondant aux racines multiples.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] KYRILLE POPOFF, *Sur la thermodynamique des processus irréversibles*, ZAMP 3, 42-51, 440-448 (1952); 5, 67-83 (1954).
- [2] KYRILLE POPOFF, *L'osmose à la lumière de la théorie des processus thermodynamiques irréversibles*, Ann. Phys. [12], 9, 261-268 (1954).
- [3] KYRILLE POPOFF, C. r. Acad. Sci. Paris 233, 648-649 (1952); 236, 785-786 (1953); 236, 1640-1641 (1953); 237, 698-700 (1953); 238, 331-333 (1954).
- [4] MAX PLANCK, *Vorlesungen über Thermodynamik*, 9<sup>e</sup> éd. (Walter de Gruyter, Berlin et Leipzig 1930).

### Zusammenfassung

In einer Reihe von Publikationen in der ZAMP und in den C. r. Pariser Akademie der Wissenschaften haben wir gezeigt, dass die phänomenologischen Relationen

$$x'_i = \sum_k L_{ik} X_k, \quad \text{mit } L_{ik} = L_{ki}, \quad (1)$$

im Falle eines adiabatisch isolierten Systems erste Integrale eines Systems Differentialgleichungen von dem Typus

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i \quad (2)$$

sind, wo

$$X_i = \frac{\partial(-\Delta S)}{\partial x_i} \quad (3)$$

und wo  $\Delta S$  den Ausdruck der Entropie im thermodynamischen Gleichgewichtszustand bedeuten. In der vorliegenden Arbeit wird der Fall betrachtet, in dem das System, bei konstantem Druck und konstanter Temperatur gehalten, Wärme mit der Umgebung austauscht. Es wird gezeigt, dass auch in diesem Falle die phänomenologischen Relationen (1) Integrale eines Systems der Differentialgleichungen (2) sind, in denen

$$X_i = \frac{\partial(-\Delta \Phi)}{\partial x_i} \quad (4)$$

und

$$\Phi = S - \frac{U + pV}{T}$$

darstellen. Die so entwickelte Theorie wird auf die Phasentheorie angewendet.

Im weitem folgt eine Untersuchung des Systems

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1, \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \lambda X_2, \quad \text{bei } \lambda > 0,$$

in welcher nachgewiesen wird, dass die ersten Integrale dieses Systems zu phänomenologischen Relationen (1) mit  $L_{12} = L_{21}$  führen.

Zuletzt wird die Frage nach den energetischen Barrieren erörtert.

(Reçu: le 26 juillet 1954.)

# Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix mit Hilfe des Quotienten-Differenzen-Algorithmus

VON HEINZ RUTISHAUSER, Zürich<sup>1)</sup>

Der Verfasser hat in zwei früheren Arbeiten<sup>2)</sup> Theorie und einige Anwendungen des Quotienten-Differenzen-Algorithmus (QD-Algorithmus) behandelt. Die vorliegende Arbeit befasst sich mit einer Erweiterung des QD-Algorithmus, welche das im Titel genannte Problem zu lösen gestattet. Zuvor behandeln wir nochmals kurz die grundlegenden Eigenschaften des QD-Algorithmus:

Wenn eine Potenzreihe  $f(z) = \sum_0^\infty s_n/z^{n+1}$  durch ihre Koeffizienten gegeben ist, so kann man, von den Quotienten  $q_1^{(v)} = s_{v+1}/s_v$  ausgehend, mit Hilfe der Formeln

$$e_\sigma^{(v)} = q_\sigma^{(v+1)} - q_\sigma^{(v)} + e_{\sigma-1}^{(v+1)}, \quad q_{\sigma+1}^{(v)} = \frac{e_\sigma^{(v+1)}}{e_\sigma^{(v)}} q_\sigma^{(v+1)} \quad (*)$$

ein zweidimensionales Schema von Zahlen  $q_\sigma^{(v)}, e_\sigma^{(v)}$  aufbauen:

$$\begin{array}{cccccccc} & & s_0 & & & & & & \\ & & q_1^{(0)} & & & & & & \\ s_1 & & & e_1^{(0)} & & & & & \\ & q_1^{(1)} & & & q_2^{(0)} & & & & \\ s_2 & & & e_1^{(1)} & & e_2^{(0)} & & & \\ & q_1^{(2)} & & & q_2^{(1)} & & q_3^{(0)} & & \\ s_3 & \cdot & e_1^{(2)} & \cdot & e_2^{(1)} & \cdot & e_3^{(0)} & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Die in der obersten Schrägreihe dieses Schemas stehenden Zahlen  $q_\sigma^{(0)}, e_\sigma^{(0)}$  treten auch in der Kettenbruchentwicklung der Funktion  $f(z)$  auf, es gilt nämlich die formale Identität:

$$f(z) = \frac{s_0}{z} - \frac{q_1^{(0)}}{1} - \frac{e_1^{(0)}}{z} - \frac{q_2^{(0)}}{1} - \frac{e_2^{(0)}}{z} - \dots$$

Eine der wichtigsten Anwendungen des QD-Algorithmus beruht darauf, dass man das QD-Schema der Funktion  $f(z)$  auch von oben nach unten auf-

<sup>1)</sup> Institut für angewandte Mathematik der ETH.

<sup>2)</sup> *Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, ZAMP 5, 233–251 (1954), und *Anwendungen des Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, ZAMP 5, 496–508 (1945). Diese beiden Arbeiten sind im folgenden immer als I und II zitiert; ein Hinweis wie etwa (II, 7) weist auf die Formel (7) der Arbeit II.

bauen kann, wenn die Funktion  $f(z)$  bereits als S-Kettenbruch gegeben ist, das heisst, wenn man die oberste Schrägzeile des QD-Schemas kennt. Die Rekursionsformeln hierfür entstehen durch Umstellung der Formeln (\*) (vgl. II, § 5):

$$q_{\sigma}^{(v+1)} = q_{\sigma}^{(v)} + e_{\sigma}^{(v)} - e_{\sigma-1}^{(v+1)}, \quad e_{\sigma}^{(v+1)} = \frac{q_{\sigma+1}^{(v)} e_{\sigma}^{(v)}}{q_{\sigma}^{(v+1)}}.$$

Auf diese Weise lassen sich leicht die Pole von  $f(z)$  berechnen, da diese nach I, § 7, die Grenzwerte der  $q$ -Kolonnen des QD-Schemas sind:

$$\lambda_{\sigma} = \lim_{v \rightarrow \infty} q_{\sigma}^{(v)} \quad (\sigma = 1, 2, \dots).$$

Die vorliegende Arbeit zeigt nun, dass dieses Prinzip auch auf Vektoren übertragen werden kann, das heisst, man kann Rekursionsformeln angeben, durch die eine dem QD-Schema analoge Anordnung von Vektoren  $x_{\sigma}^{(v)}$  erzeugt wird, die für  $v \rightarrow \infty$  gegen die Eigenvektoren  $v_{\sigma}$  der Matrix  $A$  konvergieren. Diese Rekursionsformeln sind ein diskontinuierliches Analogon zu den Formeln (24) und (25) in [3]<sup>1)</sup>.

## 1. Die Bestimmung der Eigenwerte

Zur Bestimmung der Eigenwerte einer Matrix  $A$  (oder eines Integraloperators) kann man auf die in I, § 2, beschriebene Weise einige Schwarzsche Konstanten berechnen und dann das QD-Schema aufstellen. Die so erhaltenen Werte  $q_1^{(v)}$ ,  $q_2^{(v)}$  geben dann einigen Aufschluss über die Lage der beiden ersten Eigenwerte, doch werden genauere Aussagen aus den in II, § 3, genannten Gründen nicht zu erhalten sein. Es empfiehlt sich vielmehr die Anwendung des QD-Algorithmus in der progressiven Form (II, § 5), insbesondere wenn man noch weitere Eigenwerte sucht.

Die für diesen Zweck notwendigen Anfangswerte  $q_{\sigma}^{(0)}$ ,  $e_{\sigma}^{(0)}$  beschafft man sich im Falle eines Eigenwertproblems am besten mit Hilfe des Biorthogonalisierungsalgorithmus von C. LANZOS [1], [2], [3]; die Rechenvorschrift für dieses Verfahren lautet wie folgt:

*Rechenvorschrift A:* Beginnend mit einem beliebigen Vektorpaar  $x_1, y_1^{(2)}$  berechne man rekursiv für  $\sigma = 1, 2, \dots, n^3)$ :

$$\left. \begin{aligned} x_{\sigma+1} &= A x_{\sigma} - \alpha_{\sigma} x_{\sigma} - \beta_{\sigma-1} x_{\sigma-1}, & y_{\sigma+1} &= A^* y_{\sigma} - \alpha_{\sigma} y_{\sigma} - \beta_{\sigma-1} y_{\sigma-1}, \\ \text{mit } \beta_0 &= 0, & \beta_{\sigma-1} &= \frac{(x_{\sigma}, y_{\sigma})}{(x_{\sigma-1}, y_{\sigma-1})}, & \alpha_{\sigma} &= \frac{(A x_{\sigma}, y_{\sigma})}{(x_{\sigma}, y_{\sigma})}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 401.

<sup>2)</sup> Bei unglücklicher Wahl von  $x_1$  und  $y_1$  können allerdings die in [3], § 4, beschriebenen Fälle eintreten. Wir machen aber hier und auch weiterhin die stillschweigende Voraussetzung, dass die Anfangsvektoren für den BO-Algorithmus immer in allgemeiner Lage seien.

<sup>3)</sup> Für  $\sigma = n$  (Reihenanzahl der Matrix  $A$ ) müssen diese Formeln  $x_{n+1} = y_{n+1} = 0$  ergeben, was man als Kontrolle benützen kann. Demgegenüber sind die ebenfalls im letzten Schritt berechneten Grössen  $\alpha_n$  und  $\beta_{n-1}$  wesentlich für die weitere Rechnung.



Damit hat man zwar erst die Jacobische Form der Matrix  $A$ , aber durch Umkehrung der Formeln (I, 19) ergeben sich aus den  $\alpha_\sigma, \beta_\sigma$  sogleich die gesuchten Anfangswerte  $q_\sigma^{(0)}, e_\sigma^{(0)}$ :

$q_1^{(0)} = \alpha_1,$

$e_1^{(0)} = \frac{\beta_1}{q_1^{(0)}},$

$q_2^{(0)} = \alpha_2 - e_1^{(0)},$

$e_2^{(0)} = \frac{\beta_2}{q_2^{(0)}},$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$q_{n-1}^{(0)} = \alpha_{n-1} - e_{n-2}^{(0)},$

$e_{n-1}^{(0)} = \frac{\beta_{n-1}}{q_{n-1}^{(0)}}.$

$q_n^{(0)} = \alpha_n - e_{n-1}^{(0)};$

}

(2)

Die weitere Rechnung verläuft nach II, § 5.

2. Das Problem der Eigenvektorberechnung

Wir gehen aus von der Aussage, dass die durch den BO-Algorithmus aus  $x_1, y_1$  erzeugten Vektorsysteme  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und  $y_1, y_2, \dots, y_n$  « annähernd die Eigenvektoren der Matrizen  $A$  und  $A^*$  sind, falls die Anfangsvektoren  $x_1, y_1$  geeignet gewählt wurden » (vgl. [3], Satz 7, S. 54). Zwar sind die dort verwendeten Anfangsvektoren  $x(t) = e^{At/2} x_0$  und  $y(t) = e^{A^*t/2} y_0$  für die gegenwärtige Untersuchung nicht zweckmässig, jedoch kann man in völlig analoger Weise den folgenden Satz beweisen:

Satz 1: Falls die Eigenwerte von  $A$  verschiedene Absolutbeträge besitzen, gilt für das mit dem BO-Algorithmus aus den Anfangsvektoren

$x_1^{(2\mu)} = A^\mu x_1^{(0)}; \quad y_1^{(2\mu)} = (A^*)^\mu y_1^{(0)}$

- - -

(3)

erzeugte Biorthogonalsystem  $x_1^{(2\mu)} \dots x_n^{(2\mu)}, y_1^{(2\mu)} \dots y_n^{(2\mu)}$ :  
Für  $\mu \rightarrow \infty$  streben die Vektoren  $x_\sigma^{(2\mu)}, y_\sigma^{(2\mu)}$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, n$ ) gegen die Eigenvektoren der Matrix  $A$  bzw.  $A^{*1}$ .

Die praktische Bedeutung dieses Satzes ist zunächst gering, da der BO-Algorithmus mit den Anfangsvektoren (3) bei grossem  $\mu$  numerisch instabil ist. Die Aufrundungsfehler haben dann nämlich eine mit wachsendem  $\sigma$  zunehmende Verfälschung der Vektoren  $x_\sigma^{(2\mu)}$  und  $y_\sigma^{(2\mu)}$  zur Folge, welche so stark sein kann, dass die Aussage von Satz 1 völlig illusorisch wird.

1) Diese Konvergenzaussage bezieht sich nur auf die Richtung der Vektoren.

Angesichts dieser Tatsache scheint es zweckmässig, den BO-Algorithmus nicht mit einem nach (3) vorbehandelten Vektorpaar zu beginnen, sondern mit einem Paar von Vektoren  $x_1^{(0)}, y_1^{(0)}$ , an welchen alle Eigenvektoren gleichmässig beteiligt sind<sup>1)</sup>. Allerdings sind dann die  $x_\sigma^{(0)}, y_\sigma^{(0)}$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, n$ ) zwar ein Biorthogonalsystem, jedoch auch nicht angenähert die Eigenvektoren der Matrix  $A$  bzw.  $A^*$ . Wir werden aber in § 3 zeigen, dass man aus diesen  $x_\sigma^{(0)}, y_\sigma^{(0)}$  die den Anfangsvektoren (3) entsprechenden Biorthogonalsysteme  $x_\sigma^{(2\mu)}, y_\sigma^{(2\mu)}$  rekursiv berechnen kann, ganz ähnlich wie man die  $q_\sigma^{(\nu)}, e_\sigma^{(\nu)}$  mit Hilfe der Formeln (II, 4) rekursiv aus den  $q_\sigma^{(0)}, e_\sigma^{(0)}$  erhält. Dabei ist diese rekursive Berechnung der  $x_\sigma^{(2\mu)}$  und  $y_\sigma^{(2\mu)}$  durchaus numerisch stabil.

### 3. Rekursive Berechnung der Vektoren $x_\sigma^{(2\mu)}, y_\sigma^{(2\mu)}$

Wir ziehen nun auch die mit dem BO-Algorithmus verbundenen Polynome  $p_\sigma(z)$  in den Kreis unserer Betrachtungen. Diese können unter Verwendung der in (1) auftretenden Grössen  $\alpha_\sigma$  und  $\beta_\sigma$  wie folgt rekursiv definiert werden:

$$\left. \begin{aligned} p_{-1}(z) &\equiv 0, \quad p_0(z) \equiv 1, \\ p_{\sigma+1}(z) &= (z - \alpha_{\sigma+1}) p_\sigma(z) - \beta_\sigma p_{\sigma-1}(z) \quad (\sigma = 0, 1, \dots, n-1). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Diese Polynome gestatten eine explizite Darstellung der Vektoren  $x_\sigma, y_\sigma$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, n$ ); es gilt nämlich<sup>2)</sup>

$$x_{\sigma+1} = p_\sigma(A) x_1; \quad y_{\sigma+1} = p_\sigma(A^*) y_1. \quad (5)$$

Im weiteren wollen wir auch die Polynome  $p_\sigma^{(2\mu)}$  in Betracht ziehen, die in analoger Weise aus den Anfangsvektoren  $x_1^{(2\mu)} = A^\mu x_1^{(0)}$  und  $y_1^{(2\mu)} = (A^*)^\mu y_1^{(0)}$  hervorgehen. Hierüber gilt:

**Satz 2:** Man bilde mit den Anfangsvektoren  $x_1^{(0)}, y_1^{(0)}$  einerseits die Schwarzschen Konstanten  $s_\kappa = (A^\kappa x_1^{(0)}, y_1^{(0)})$  und mit diesen das QD-Schema nach I, § 3, sowie das P-Schema nach I, § 4. Führt man andererseits mit den Anfangsvektoren  $x_1^{(2\mu)}, y_1^{(2\mu)}$  aus (3) den BO-Algorithmus durch und bildet analog zu (4) die Polynome  $p_\sigma^{(2\mu)}$ , so sind diese identisch mit den gleichnamigen Polynomen in der  $(2\mu)$ -ten Schrägzeile des obenerwähnten P-Schemas.

**Beweis:** Bildet man Schwarzsche Konstanten  $s_\kappa^*$  mit den Anfangsvektoren  $x_1^{(2\mu)}, y_1^{(2\mu)}$  (an Stelle von  $x_1^{(0)}, y_1^{(0)}$ ), so erhält man wegen  $s_\kappa^* = s_{2\mu+\kappa}$  ein QD-

<sup>1)</sup> Ein Vektorpaar, dessen Komponenten Zufallswerte sind, wird dieser Bedingung in der Regel genügen. Noch besser wäre freilich eine Vorbehandlung durch Multiplikation mit  $A^{-1}$  bzw.  $(A^*)^{-1}$ , die die Anteile der absolut kleinsten Eigenwerte verstärkt. Bei positiv definiten symmetrischen Matrizen kann statt dessen Vorbehandlung mit einem Verfahren von KARUSH [4] empfohlen werden. Dieses benützt  $A^{-1}$  nicht.

<sup>2)</sup> Diese Polynome sind in [3], § 5, mit  $p_{\sigma+1}(\lambda)$  bezeichnet.

<sup>3)</sup> Vgl. etwa [5], Formel (9), S. 983. Der Vektor  $\xi_j$  entspricht dabei unserem  $x_{j+1}$ .

Schema und ein zugeordnetes P-Schema, welche offenbar auch durch Abschneiden des QD- (bzw. P-) Schemas der  $s_x$  oberhalb der mit  $2\mu$  numerierten Schrägzeile entstehen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & s_0 & & & & \\
 & & & q_1^{(0)} & & & \\
 & s_1 & & & e_1^{(0)} & & \\
 & & q_1^{(1)} & & q_2^{(0)} & & \\
 s_2 & & \cdot & e_1^{(1)} & & e_2^{(0)} & \cdot \\
 \cdot & & \cdot & \cdot & q_2^{(1)} & \cdot & \cdot \\
 \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 (x_1^{(2\mu)}, y_1^{(2\mu)}) = s_0^* = s_{2\mu} & & & q_1^{(2\mu)} & \cdot & \cdot & \\
 & & s_1^* = s_{2\mu+1} & & e_1^{(2\mu)} & \cdot & \\
 & & & q_1^{(2\mu)} & & q_2^{(2\mu)} & \\
 & & & & & & e_2^{(2\mu)} \cdot
 \end{array}$$

Damit sind aber die  $p_\sigma^{(2\mu)}$  des P-Schemas nach I, § 8, auch die Polynome von LANZOS für die Anfangsvektoren  $x_1^{(2\mu)}, y_1^{(2\mu)}$ , was zu beweisen war.

Nach (5) lassen sich nun auch die in Satz 1 auftretenden Vektoren  $x_\sigma^{(2\mu)}, y_\sigma^{(2\mu)}$  durch die Polynome des P-Schemas ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} x_{\sigma+1}^{(2\mu)} &= p_\sigma^{(2\mu)}(A) x_1^{(2\mu)} = A^\mu p_\sigma^{(2\mu)}(A) x_1^{(0)}, \\ y_{\sigma+1}^{(2\mu)} &= p_\sigma^{(2\mu)}(A^*) y_1^{(2\mu)} = (A^*)^\mu p_\sigma^{(2\mu)}(A^*) y_1^{(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Der Vorteil dieser Darstellung beruht darauf, dass es für die hier auftretenden Polynome  $p_\sigma^{(2\mu)}$  Rekursionsformeln gibt, die wir zum Teil schon in I, § 4, hergeleitet haben. Aus (I, 5) folgt nämlich

$$z p_{\sigma-1}^{(2\mu+1)}(z) = p_\sigma^{(2\mu)}(z) + q_\sigma^{(2\mu)} p_{\sigma-1}^{(2\mu)}(z),$$

ferner aus (I, 6)

$$z p_{\sigma-1}^{(2\mu+2)}(z) - z p_{\sigma-1}^{(2\mu+1)}(z) = -z e_{\sigma-1}^{(2\mu+1)} p_{\sigma-2}^{(2\mu+2)}(z).$$

Daraus durch Addition

$$z p_{\sigma-1}^{(2\mu+2)}(z) = p_\sigma^{(2\mu)}(z) + q_\sigma^{(2\mu)} p_{\sigma-1}^{(2\mu)}(z) - z e_{\sigma-1}^{(2\mu+1)} p_{\sigma-2}^{(2\mu+2)}(z), \quad (7)$$

und zwar für  $\sigma = 1, 2, \dots, n$  und für alle  $\mu$ , jedoch unter Beachtung von  $e_0^{(\nu)} = 0$  und  $p_{n+1}^{(\nu)}(z) = 0$ . Setzt man in (7) die Matrix  $A$  an Stelle der Variablen  $z$  ein und

multipliziert dann das ganze mit dem Vektor  $x_1^{(2\mu)}$ , so folgt mit (6)

$$A p_{\sigma-1}^{(2\mu+2)}(A) x_1^{(2\mu)} = x_{\sigma+1}^{(2\mu)} + q_{\sigma}^{(2\mu)} x_{\sigma}^{(2\mu)} - A e_{\sigma-1}^{(2\mu+1)} p_{\sigma-2}^{(2\mu+2)}(A) x_1^{(2\mu)}$$

und weiter wegen  $A x_1^{(2\mu)} = x_1^{(2\mu+2)}$ :

$$\left. \begin{aligned} x_{\sigma}^{(2\mu+2)} &= x_{\sigma+1}^{(2\mu)} + q_{\sigma}^{(2\mu)} x_{\sigma}^{(2\mu)} - e_{\sigma-1}^{(2\mu+1)} x_{\sigma-1}^{(2\mu+2)} \\ \text{für } \sigma &= 1, 2, \dots, n \text{ und für alle } \mu. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Dabei ist immer  $e_0^{(2\mu+1)} = 0$  und  $x_{n+1}^{(2\mu)} = 0$  zu setzen.

Diese Formel ermöglicht offenbar die rekursive Berechnung der in Satz 1 genannten Vektoren  $x_1^{(2\mu)}, x_2^{(2\mu)}, \dots, x_n^{(2\mu)}$  – und damit die Berechnung der Eigenvektoren – aus den  $x_{\sigma}^{(0)}$ , wenn man sie für jedes feste  $\mu$  ( $\mu = 0, 1, \dots$ ) nacheinander für  $\sigma = 1, 2, \dots, n$  anwendet. Analoge Formeln gelten für die Vektoren  $y$ , doch werden diese im weiteren Verlauf der Rechnung nicht mehr gebraucht. Die in (8) auftretenden Skalare  $q_{\sigma}^{(v)}, e_{\sigma}^{(v)}$  lassen sich natürlich ebenfalls rekursiv aus den  $q_{\sigma}^{(0)}, e_{\sigma}^{(0)}$  berechnen (vgl. II, § 5). Wir wollen jedoch auch die in den Formeln (II, 4) nicht auftretenden Grössen  $\alpha_{\sigma}^{(2\mu)}, \beta_{\sigma}^{(2\mu)}$  berechnen, welche zu den Vektoren  $x_{\sigma}^{(2\mu)}, y_{\sigma}^{(2\mu)}$  gehören. Diese hängen mit den  $q_{\sigma}^{(2\mu)}, e_{\sigma}^{(2\mu)}$  nach II, § 7, wie folgt zusammen:

$$\alpha_{\sigma}^{(2\mu+2)} = q_{\sigma}^{(2\mu+1)} + e_{\sigma}^{(2\mu+1)}, \quad \beta_{\sigma}^{(2\mu+2)} = q_{\sigma+1}^{(2\mu+1)} e_{\sigma}^{(2\mu+1)}, \quad (9)$$

während sich umgekehrt  $q_{\sigma}^{(2\mu)}, e_{\sigma}^{(2\mu)}$  aus  $\alpha_{\sigma}^{(2\mu)}, \beta_{\sigma}^{(2\mu)}$  nach (2) ergeben. Insgesamt erhält man so zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix  $A$  die Rechenvorschrift B (siehe Seite 393). Weil diese die Kenntnis der durch den BO-Algorithmus berechneten Grössen  $\alpha_{\sigma}, \beta_{\sigma}, x_{\sigma}$  voraussetzt, muss vorgängig die Rechenvorschrift A durchgeführt werden.

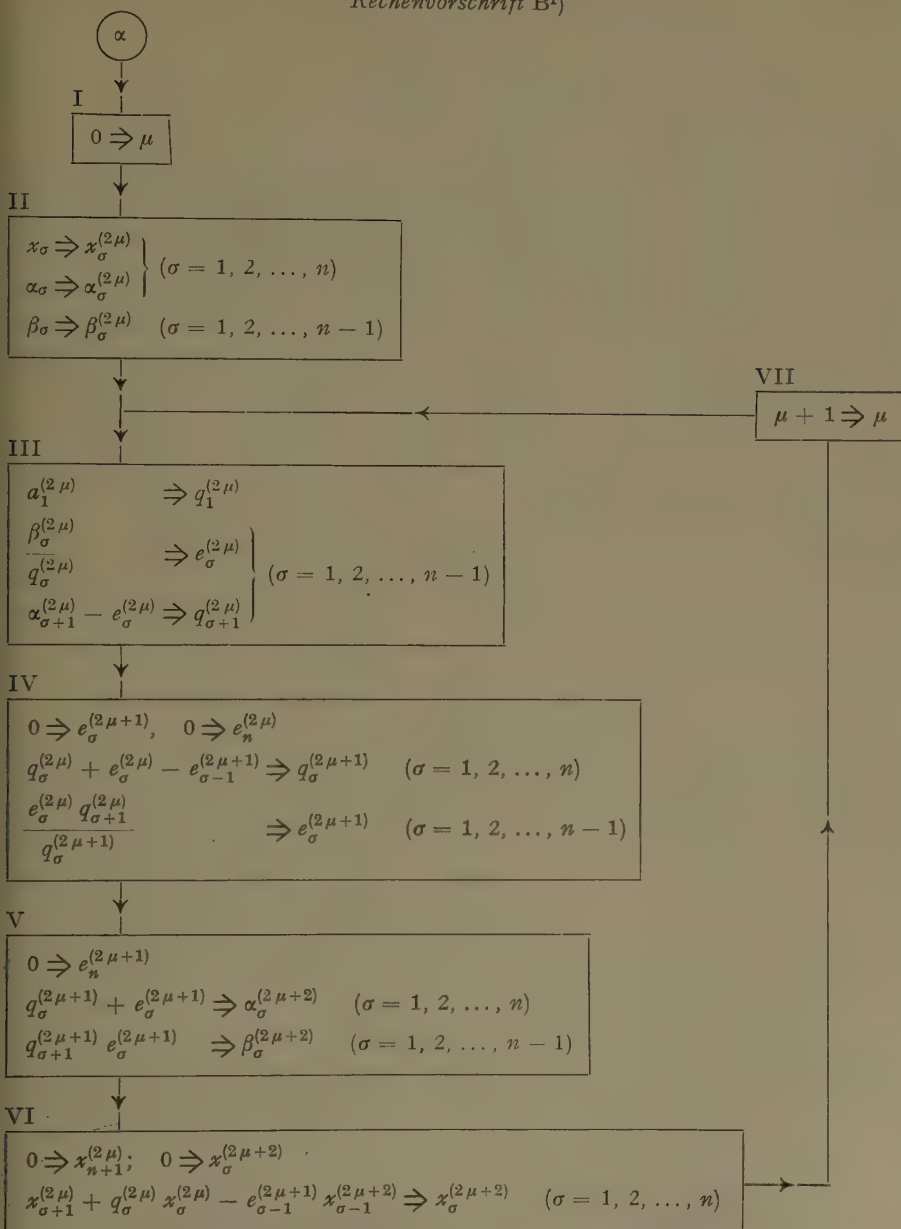
Auf Seite 394 zeigen wir als Beispiel die Bestimmung der Eigenwerte einer dreireihigen Matrix mit Hilfe der Rechenvorschrift B; das Beispiel erlaubt allerdings keinen auch für grosses  $n$  schlüssigen Vergleich mit anderen Methoden. Die Matrix sei

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Wir verfahren erst nach Rechenvorschrift A mit  $x_1 = y_1 = (1, 0, 0)$  und dann nach Rechenvorschrift B. Die Tabelle auf Seite 394 zeigt für  $\mu = 0$  die als Ergebnis von Rechenvorschrift A erhaltenen Ausgangswerte  $x_{\sigma}^0, \alpha_{\sigma}^0, \beta_{\sigma}^0$  und weiter die mit der Rechenvorschrift B erhaltenen Grössen. Man erkennt für  $\mu = 4$  bereits die ungefähren Eigenwerte und Eigenvektoren.

Das Beispiel zeigt ferner, dass die Vektoren  $x_{\sigma}^{(2\mu)}$  nur der Richtung nach konvergieren, während ihre Längen zum Teil gegen 0, zum Teil gegen  $\infty$  streben.



Rechenvorschrift B<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Das sogenannte «Ergibt-Zeichen»  $\Rightarrow$  bedeutet, dass die rechts davon stehende Grösse in der angegebenen Weise zu berechnen ist.  $0 \Rightarrow \mu$  bedeutet, dass der Index  $\mu$  den Wert 0 annehmen soll.

## Numerisches Beispiel zur Rechenvorschrift B

Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $x_1^{(0)} = y_1^{(0)} = (1, 0, 0)$ . Man findet:

	$x_\sigma^{(2\mu)}$ (3 Komponenten)			$\alpha_\sigma^{(2\mu)}$	$\beta_\sigma^{(2\mu)}$	$q_\sigma^{(2\mu)}$	$e_\sigma^{(2\mu+1)}$
$\mu = 0, \sigma = 1$	1	0	0	1	2	1	3,333333
$\sigma = 2$	0	1	1	7	4	5	0,06486486
$\sigma = 3$	0	-2	2	1		0,2	
$\mu = 1, \sigma = 1$	1	1	1	6,333333	8,222222	6,333333	0,2098004
$\sigma = 2$	-3,333333	-0,333333	3,666667	2,531532	0,008765522	1,233286	882,939 · 10 <sup>-6</sup>
$\sigma = 3$	0,2162162	-0,3783784	0,1621622	0,1351351		0,1280277	
$\mu = 2, \sigma = 1$	3	6	10	7,841379	0,2162188	7,841379	0,003517833
$\sigma = 2$	-4,524138	-2,048276	2,586207	1,031476	112,2611 · 10 <sup>-6</sup>	1,0039019	14,1984 · 10 <sup>-6</sup>
$\sigma = 3$	0,03167620	-0,04663441	0,01847779	0,1271447		0,1270329	
$\mu = 3, \sigma = 1$	19	45	81	7,872471	0,00351958	7,872471	56,78990 · 10 <sup>-6</sup>
$\sigma = 2$	-4,567953	-2,261205	2,329831	1,0005101	1,80346 · 10 <sup>-6</sup>	1,000063	0,229054 · 10 <sup>-6</sup>
$\sigma = 3$	0,004088905	-0,005891999	0,002314207	0,1270187		0,1270169	
$\mu = 4, \sigma = 1$	145	352	640	7,872975	56,7904 · 10 <sup>-6</sup>		
$\sigma = 2$	-4,581387	-2,287229	+2,295947	1,000008	0,0290936 · 10 <sup>-6</sup>		
$\sigma = 3$	520,4094 · 10 <sup>-6</sup>	-747,8595 · 10 <sup>-6</sup>	293,4175 · 10 <sup>-6</sup>	0,1270167			

Man könnte jedoch an Stelle der Vektoren  $x_{\sigma}^{(2\mu)}$  die Vektoren

$$\xi_{\sigma}^{(2\mu)} = \frac{x_{\sigma}^{(2\mu)}}{q_{\sigma}^{(0)} q_{\sigma}^{(2)} \dots q_{\sigma}^{(2\mu-2)}}$$

betrachten, welche im eigentlichen Sinne konvergieren, und die Arbeitsvorschrift B auf die Berechnung der  $\xi_{\sigma}^{(2\mu)}$  umstellen. Dies ist jedoch nur eine Frage der Rechentechnik und soll hier nicht behandelt werden.

Wenn die Matrix  $A$  komplexe Eigenwerte besitzt, so haben diese paarweise gleiche Absolutbeträge, so dass Satz 1 nicht gilt. Wenn aber  $\lambda_{m+1} = \bar{\lambda}_{m+2}$  ist, jedoch keine weiteren Eigenwerte denselben Absolutbetrag besitzen, so konvergiert wenigstens die von  $x_{m+1}^{(2\mu)}$ ,  $x_{m+2}^{(2\mu)}$  aufgespannte Ebene für  $\mu \rightarrow \infty$  gegen die von den Eigenvektoren  $v_{m+1}$  und  $v_{m+2} = \bar{v}_{m+1}$  aufgespannte Ebene, während das Polynom

$$\lambda^2 - [\alpha_{m+1}^{(2\mu)} + \alpha_{m+2}^{(2\mu)}] \lambda + [\alpha_{m+1}^{(2\mu)} \alpha_{m+2}^{(2\mu)} - \beta_{m+1}^{(2\mu)}]$$

gegen ein Polynom mit den Wurzeln  $\lambda_{m+1}$  und  $\lambda_{m+2}$  konvergiert. Die Eigenvektoren  $v_{m+1}$  und  $v_{m+2}$  erhält man dann als Grenzwert von

$$x_{m+2}^{(2\mu)} + [\lambda - \alpha_{m+2}^{(2\mu)}] x_{m+1}^{(2\mu)},$$

je nachdem man  $\lambda_{m+1}$  oder  $\lambda_{m+2}$  für  $\lambda$  einsetzt.

### *Betrachtung des Abbrechfehlers*

Wenn man den durch die Rechenvorschrift B gegebenen Prozess bei einem bestimmten  $\mu$  abbricht, so sind die Vektoren  $x_{\sigma}^{(2\mu)}$  nur angenähert die Eigenvektoren von  $A$ . Den Abbrechfehler kann man am einfachsten durch die Betrachtung der Beziehungen

$$A x_{\sigma}^{(2\mu)} = x_{\sigma+1}^{(2\mu)} + \alpha_{\sigma}^{(2\mu)} x_{\sigma}^{(2\mu)} + \beta_{\sigma-1}^{(2\mu)} x_{\sigma-1}^{(2\mu)} \quad (10)$$

abschätzen, wobei natürlich  $\beta_0^{(2\mu)} = 0$  und  $x_n^{(2\mu)} = 0$  zu setzen ist. (10) beruht darauf, dass die  $x_{\sigma}^{(2\mu)}$ ,  $y_{\sigma}^{(2\mu)}$  für jedes  $\mu$  ein Biorthogonalsystem nach LANCZOS bilden und die  $\alpha_{\sigma}^{(2\mu)}$ ,  $\beta_{\sigma}^{(2\mu)}$  die Elemente der zugehörigen Jacobischen Form von  $A$  sind. Wenn man die  $y_{\sigma}^{(2\mu)}$  in der Rechnung mitführt, kann man übrigens die Biorthogonalität der beiden Vektorsysteme  $x_{\sigma}^{(2\mu)}$  und  $y_{\sigma}^{(2\mu)}$  als Rechenkontrolle benutzen.

## **4. Ein quadratisch konvergentes Verfahren zur Eigenvektorbestimmung**

Der QD-Algorithmus in der bisher angegebenen Form (ausgenommen in II, § 7) konvergiert linear, das heisst, die in I, Satz 3, behauptete Konvergenz

der  $q_\sigma^{(v)} \rightarrow \lambda_\sigma$  und der  $e_\sigma^{(v)} \rightarrow 0$  (für  $v \rightarrow \infty$ ) ist ungefähr so gut wie die Konvergenz einer geometrischen Reihe; dasselbe gilt für die Vektoren  $x_\sigma^{(2\mu)}$  der Rechenvorschrift B. Wenn aber die Matrix  $A$  symmetrisch ist, so kann sie den in § 3 beschriebenen Prozess zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren wesentlich beschleunigen. Das Prinzip dieser Konvergenzbeschleunigung ist dasselbe wie in II, § 7; es beruht auf einer Verschiebung des Koordinatennullpunkts der  $\lambda$ -Ebene. Für das Folgende nehmen wir an, die Eigenwerte seien einfach und der Grösse nach geordnet:  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_n$ .

Wir gehen aus von den Grössen  $x_\sigma^{(0)}$ ,  $\alpha_\sigma^{(0)}$ ,  $\beta_\sigma^{(0)}$ , die man mit Hilfe des BO-Algorithmus von LANCZOS aus einem Anfangsvektor<sup>1)</sup> ermittelt hat. Aus diesen würde man nach Rechenvorschrift B schrittweise  $\alpha_\sigma^{(2)}$ ,  $\beta_\sigma^{(2)}$ ,  $x_\sigma^{(2)}$ , dann  $\alpha_\sigma^{(4)}$ ,  $\beta_\sigma^{(4)}$ ,  $x_\sigma^{(4)}$  usw. berechnen.

Nun ist aber der BO-Algorithmus im wesentlichen invariant gegenüber einer Spektralverschiebung, das heisst, wenn man ihn mit demselben Anfangsvektor  $x_1$  aber mit  $\hat{A} = A - tE$  an Stelle von  $A$  durchführt, ändern sich nur die  $\alpha_\sigma$  zu  $\hat{\alpha}_\sigma = \alpha_\sigma - t$ ; die  $x$  und  $\beta$  bleiben unverändert. Wenn man also nach der Berechnung von  $\alpha_\sigma$ ,  $\beta_\sigma$ ,  $x_\sigma$  (gemäss Rechenvorschrift A) die Grössen  $\hat{\alpha}_\sigma = \alpha_\sigma - t$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, n$ ) bildet und mit diesen in die Rechenvorschrift B (Feld II) eingeht, verläuft der ganze Prozess wie wenn man mit der Matrix  $A - tE$  an Stelle von  $A$  gerechnet hätte: An Stelle der  $\beta_\sigma^{(2\mu)}$ , die ungefähr wie  $(\lambda_{\sigma+1}/\lambda_\sigma)^{2\mu}$  gegen 0 konvergieren, erhalten wir jetzt andere Werte  $\hat{\beta}_\sigma^{(2\mu)}$ , die wie  $[(\lambda_{\sigma+1} - t)/(\lambda_\sigma - t)]^{2\mu}$  gegen 0 streben.

Für  $t$  setzt man vorteilhaft einen Näherungswert für den kleinsten Eigenwert  $\lambda_n$  ein, dann wird  $(\lambda_n - t)/(\lambda_{n-1} - t)$  klein, so dass  $\hat{\beta}_{n-1}^{(2\mu)}$  rasch gegen 0 konvergiert (und ebenso  $\hat{\alpha}_n^{(2\mu)}$  gegen  $\lambda_n - t$ , sowie  $\hat{x}_n^{(2\mu)}$  gegen  $v_n$ ). Damit wird die Konvergenz des Verfahrens zwar besser, bleibt aber linear. Es lässt sich jedoch bereits nach einem Schritt auf Grund der neuen  $\alpha$ - und  $\beta$ -Werte ein besserer Näherungswert für  $\lambda_n$  angeben, was man für eine weitere Spektralverschiebung verwenden kann. Auf diese Weise wird die Konvergenz immer schneller, bis schliesslich  $\hat{\beta}_{n-1}^{(2\mu)}$  so klein ist, dass  $\hat{x}_n^{(2\mu)}$  praktisch ein Eigenvektor ist und  $\hat{x}_1^{(2\mu)}$ ,  $\hat{x}_2^{(2\mu)}$ ,  $\dots$ ,  $\hat{x}_{n-1}^{(2\mu)}$  einen bezüglich  $A$  invarianten Teilraum aufspannen. Man kann in diesem Fall  $\alpha_n$ ,  $\beta_{n-1}$ ,  $x_n$  einfach weglassen und dasselbe Rechenverfahren auf die verbleibenden Grössen anwenden. Dies bedeutet, dass man nach Abspaltung des Eigenvektors  $v_n$  im Teilraum der verbleibenden Eigenvektoren weiterrechnet und so nacheinander alle Eigenvektoren erhält.

Die Zusammenfassung dieser Überlegungen ergibt eine Rechenvorschrift C, die aus den Feldern I, II, IV, V, VI der Rechenvorschrift B mit den auf Seite 398 angegebenen Ergänzungen besteht. Diese Rechenvorschrift liefert nacheinander

<sup>1)</sup> Wenn man bei symmetrischer Matrix  $A$  ein Paar von gleichen Anfangsvektoren  $x_1 = y_1$  wählt, so liefert der BO-Algorithmus  $x_\sigma = y_\sigma$  für alle  $\sigma$ , man braucht also nur mit einem Vektorsystem zu arbeiten, und dieses ist orthogonal.

die Eigenwerte  $\lambda_j$  und die zugehörigen Eigenvektoren  $v_j$  ( $j = n, n-1, \dots, 2, 1$ ) (siehe Feld IX der Arbeitsvorschrift C).

Praktische Überlegungen haben gezeigt, dass man als Koordinatennullpunkt zweckmässig eine untere Schranke für die noch verbleibenden Eigenwerte von  $A$  wählt: Ist der Koordinatennullpunkt nach  $\mu$  Schritten insgesamt um  $t$  verschoben worden, so verschiebt man ihn im nächsten Schritt um  $\delta_\mu$ , wo  $\delta_\mu$  eine möglichst gute untere Schranke für die Eigenwerte der Jacobischen Matrix

$$J^{(2\mu)} = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(2\mu)} & \beta_1^{(2\mu)} & & & \\ & 1 & \alpha_2^{(2\mu)} & \beta_2^{(2\mu)} & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha_{n-1}^{(2\mu)} & \beta_{n-1}^{(2\mu)} \\ & & & & & 1 & \alpha_n^{(2\mu)} \end{vmatrix} \quad (11)$$

ist. Feld IIIa der Rechenvorschrift C benützt eine Formel von GERSCHGORIN [6] für die untere Schranke der Eigenwerte von (11), doch gibt es noch andere und zum Teil wohl bessere Möglichkeiten.

Nachtrag bei der Korrektur.

Numerische Experimente lassen es als vorteilhaft erscheinen, zuerst nach den in § 1 erwähnten Methoden die Eigenwerte allein zu bestimmen und dann erst die Rechenvorschrift C anzuwenden, wobei die  $\delta_\mu$  so zu wählen sind, dass  $t_\mu$  nacheinander die  $n$  Eigenwerte durchläuft. Auf diese Weise erhält man die  $n$  Eigenvektoren in  $n$  Schritten.

## 5. Eigenwerte und Eigenvektoren unendlicher symmetrischer Matrizen

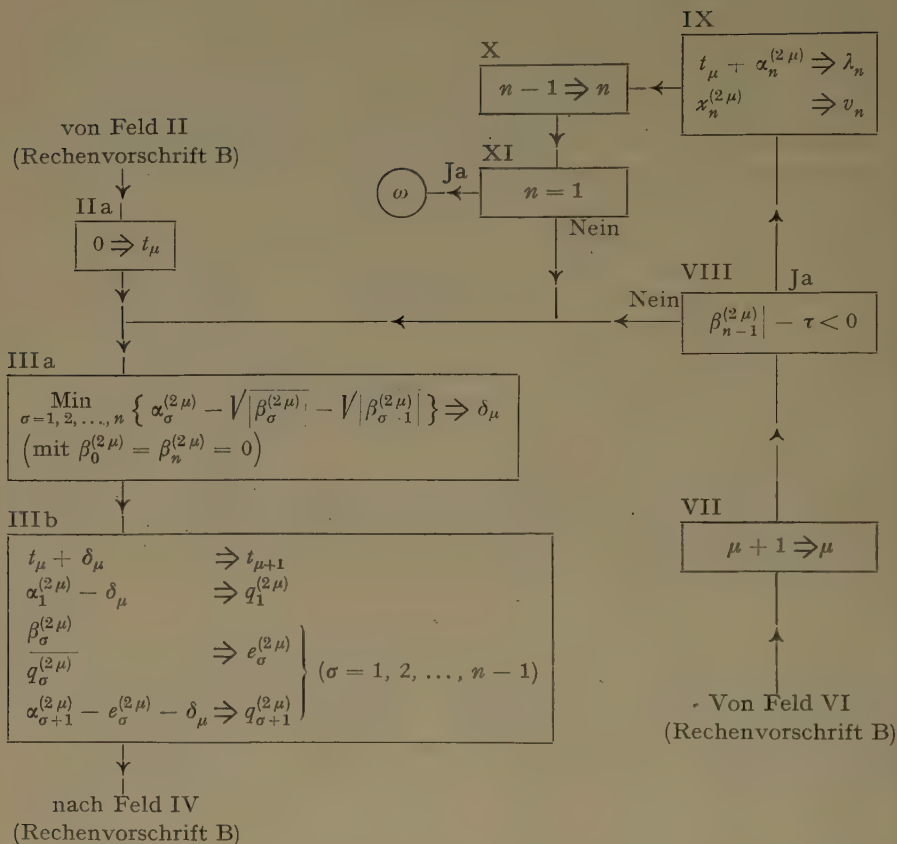
Für unendliche Matrizen bzw. Integraloperatoren kann man natürlich den BO-Algorithmus von LANCZOS<sup>1)</sup> nicht zu Ende führen, wie dies für die Durchführung der Rechenvorschrift B oder C notwendig wäre. Praktisch gilt dasselbe auch schon für endliche Matrizen grosser Reihenzahl.

Bekanntlich kann man aber bei symmetrischen und positiv definiten Matrizen (bzw. Operatoren) auch dann eine vorläufige Information über die grössten Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren erhalten, wenn man nur ein *unvollständiges* Lanczossches Orthogonalsystem und die zugehörigen  $\alpha, \beta$  berechnet. Man kommt jedoch in die bereits in § 2 genannten Schwierigkeiten, sobald man versucht, genauere Resultate zu erzielen, indem man den Anfangsvektor  $x_1$  durch Multiplikation mit  $A$  vorbehandelt (sogenannte « Voriteration »).

<sup>1)</sup> Vgl. Fussnote 1, Seite 396.



## Rechenvorschrift C



Es dürfte daher von Interesse sein, dass die in § 3 entwickelten Methoden auch auf diesen Fall mit Erfolg angewendet werden können.

Wir setzen im folgenden eine symmetrische und positiv definite Matrix  $A$  voraus und bestimmen für diese ein unvollständiges Lanczosches Orthogonalsystem  $x_1, \dots, x_m$  und die zugehörigen Skalare  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_{m-1}$ , indem wir mit einem geeigneten  $x_1^{(1)}$  die Rechenvorschrift A bis inklusive  $\sigma = m$  durchrechnen. Hier ist  $m$  eine nach Bedarf festgesetzte ganze Zahl  $< n$ ; das zu entwickelnde Verfahren wird dann die  $m$  grössten Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren liefern.

Die Grössen  $\alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_{m-1}; x_1, \dots, x_m$  sind zusammen mit dem durch Formel (1) für  $\sigma = m$  ebenfalls berechneten Vektor  $x_{m+1}$  die Ausgangs-

<sup>1)</sup> Für die Wahl dieses Anfangsvektors siehe Fussnote 1, Seite 390.

werte für das weitere Vorgehen und werden daher künftig mit dem oberen Index 0 versehen. Man erhält aus den  $\alpha_{\sigma}^{(0)}$  und  $\beta_{\sigma}^{(0)}$  ohne weiteres  $q_1^{(0)}, \dots, q_m^{(0)}$ ;  $e_1^{(0)}, \dots, e_{m-1}^{(0)}$  (Feld III der Rechenvorschrift B), doch kann man daraus nach den Formeln in Feld IV nur noch  $q_1^{(1)}, \dots, q_{m-1}^{(1)}$ ;  $e_1^{(1)}, \dots, e_{m-1}^{(1)}$  berechnen, weil das zur Berechnung von  $q_m^{(1)}$  notwendige  $e_m^{(0)}$  fehlt. Ebenso erhält man aus den  $q_{\sigma}^{(1)}$  nach Feld V der Rechenvorschrift B nur noch  $\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{m-1}^{(2)}$ ;  $\beta_1^{(2)}, \dots, \beta_{m-2}^{(2)}$ . Dagegen erlauben die in Feld VI stehenden Formeln die Berechnung der Vektoren  $x_1^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}$ , weil ja  $x_{m+1}^{(2)}$  am Anfang vorausgesetzt war.

Um nun einen dem Anfangszustand analogen Zustand herzustellen, müssen wir also noch  $\alpha_m^{(2)}$ ,  $\beta_{m-1}^{(2)}$  und  $x_{m+1}^{(2)}$  berechnen. Weil die  $x_{\sigma}^{(2)}$  ebenfalls noch ein Lanczossches Orthogonalsystem<sup>1)</sup> für den Anfangsvektor  $x_1^{(2)}$  bilden, kann man die fehlenden Grössen mit Hilfe der Formeln (1) für  $\sigma = m$  berechnen. Insgesamt ergibt sich die Arbeitsvorschrift D (siehe Seite 400).

Die so berechneten Grössen  $\alpha_1^{(2\mu)}, \dots, \alpha_m^{(2\mu)}$  konvergieren für  $\mu \rightarrow \infty$  gegen die  $m$  grössten Eigenwerte der Matrix  $A$  und die Vektoren  $x_1^{(2\mu)}, \dots, x_m^{(2\mu)}$  gegen die zugehörigen Eigenvektoren. Im Gegensatz zur Rechenvorschrift B verlangt Rechenvorschrift D bei jedem Iterationsschritt die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor. Dies ist offenbar der Preis dafür, dass mit einem unvollständigen Lanczosschen Orthogonalsystem gearbeitet werden kann. Dennoch sticht das Verfahren vorteilhaft ab, wenn man bedenkt, dass für einen Iterationsschritt, der  $m$  Vektoren  $x_{\sigma}^{(2\mu)}$  simultan verbessert, nur *einmal* eine Matrix mit einem Vektor multipliziert werden muss.

### Anmerkungen zur Rechenvorschrift D

a) Es mag rechentechnisch von Vorteil sein, den Vektor  $x_{m+1}^{(2\mu)}$  (siehe Feld VIII) gar nicht zu berechnen, sondern den Ausdruck für  $x_{m+1}^{(2\mu)}$  in die Formel (8) ( $\sigma = m$ ) einzusetzen; es resultiert dann nach einigen Umformungen die Beziehung

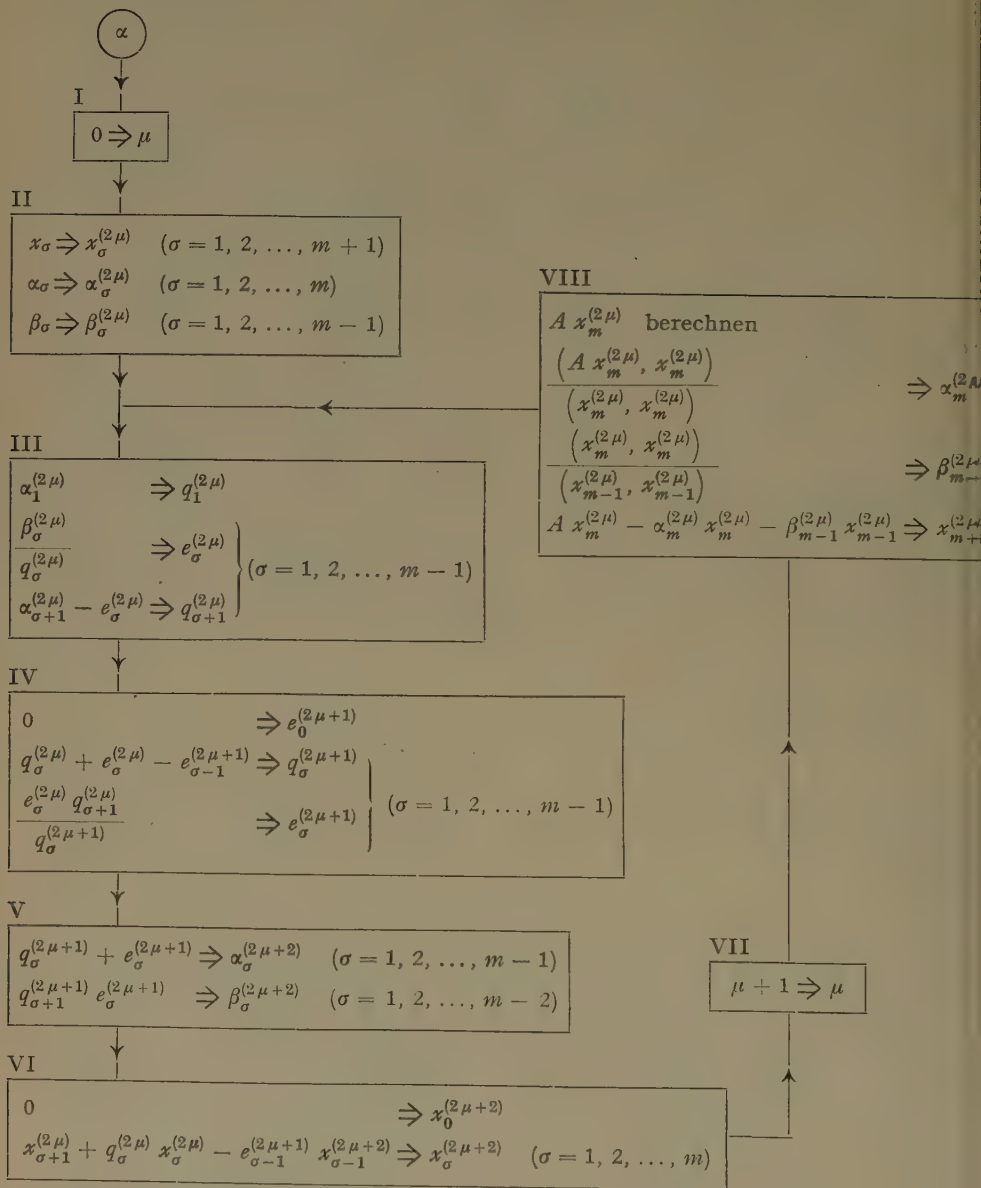
$$x_m^{(2\mu+2)} = A x_m^{(2\mu)} - (e_{m-1}^{(2\mu)} + e_{m-1}^{(2\mu+1)}) x_{m-1}^{(2\mu+2)} - e_{m-1}^{(2\mu)} e_{m-2}^{(2\mu+1)} x_{m-2}^{(2\mu+2)} \quad (12)$$

Diese Formel kann dann für  $\sigma = m$  an Stelle von (8) zur Berechnung von  $x_m^{(2\mu+2)}$  verwendet werden (anschliessend an Feld VI der Arbeitsvorschrift D).

b) Während die Formeln in Feld VI der Arbeitsvorschrift D nicht sehr empfindlich auf Rundungsfehler sind, ist die Berechnung von  $x_{m+1}^{(2\mu)}$  (Feld VIII) in dieser Hinsicht weit mehr gefährdet, vor allem für grosses  $\mu$ . Es ist daher ratsam, den nach den Formeln in Feld VIII berechneten Vektor  $x_{m+1}^{(2\mu)}$  einer «Nachorthogonalisierung» zu unterwerfen, indem man benützt, dass die  $x_{\sigma}^{(2\mu)}$  für jedes  $\mu$  ein Orthogonalsystem bilden müssen. Diese Orthogonalitätseigenschaft kann natürlich auch für Rechenkontrollen benützt werden.

<sup>1)</sup> Siehe Fussnote 1, Seite 396.

## Rechenvorschrift D



c) Auch bei dem durch Rechenvorschrift D definierten Verfahren ist noch eine Konvergenzverbesserung möglich, indem man bei jedem Iterationsschritt eine geeignete Spektralverschiebung um  $\delta_\mu$  vornimmt. Sind die Eigenwerte  $\lambda_\mu$  der Matrix  $A$  der Grösse nach numeriert und ist  $\lambda_m$  der kleinste noch interessierende Eigenwert, so sind die  $\delta_\mu$  so zu wählen, dass die sich daraus nach Arbeitsvorschrift C, Feld III b, ergebenden  $t_\mu$  das Intervall  $0 < \lambda < \lambda_m$  möglichst dicht ausfüllen. Diese Methode der Konvergenzbeschleunigung ist in der Relaxationsrechnung als *Überrelaxation* bekannt.

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] C. LANCZOS, *An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators*, J. Res. Nat. Bur. Standards 45, 255–282 (1950).
- [2] C. LANCZOS, *ibid.*, *Proceedings of a Second Symposium on Large Scale Calculating Machinery* (1949), S. 164–206.
- [3] H. RUTISHAUSER, *Beiträge zur Kenntnis des Biorthogonalisierungsalgorithmus von C. Lanczos*, ZAMP 4, 35–56 (1953).
- [4] W. KARUSH, *An Iterative Method for Finding Characteristic Vectors of a Symmetric Matrix*, Pac. J. Math. 1, 233–248 (1951).
- [5] W. KARUSH, *Determination of the Extreme Values of the Spectrum of a Bounded Self-Adjoint Operator*, Proc. Amer. Math. Soc. 2, 980–989 (1951).
- [6] S. GERSCHGORIN, *Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*. Bull. Acad. Sci. U.R.S.S., Classe math. [7] 1937, 749–754.

### Summary

Two previous papers (in Vol. V) describe theory and some applications of the quotient-difference (= QD-)algorithm. Here we give an extension which allows the determination of the eigenvectors of a matrix. Let  $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$  be a coordinate system in which  $A$  has Jacobi form (such a system may be constructed with methods of C. LANCZOS or W. GIVENS). Then the QD-algorithm allows the construction of a sequence of coordinate systems  $x_1^{(2\mu)}, \dots, x_n^{(2\mu)}$ , ( $\mu = 0, 1, 2, \dots$ ) which converge for  $\mu \rightarrow \infty$  to the system of the eigenvectors of  $A$ .

(Eingegangen: 19. Juli 1954).

## The Indentation of an Orthotropic Half Plane

By HARRY DONALD CONWAY, Ithaca, New York, U.S.A.<sup>1)</sup>

### Introduction

The first theoretical investigation of an indented half plane appears to have been made by SADOWSKY [1]<sup>2)</sup>, who calculated the pressure distribution under a flat-ended rigid block in contact with an elastic, isotropic half plane, the block being subjected to an axial force. SADOWSKY ignored the shearing forces between the block and the half plane, and thus assumed that the half plane was deformed only by normally applied forces.

Further progress was made by OKUBO [2], who treated the same problem but took into account the frictional forces between the block and half plane. OKUBO observed that, in so far as the calculation of the contact pressure is concerned, the effect of friction could be neglected. Due to the slipping which may occur in practise, it is probable that the frictional forces are smaller than those computed by OKUBO. For the above reasons and because the inclusion of the frictional forces considerably increases the complexity of the problem, further investigators have chosen to ignore them.

A very considerable advancement was next made by SCHUBERT [3], who gave a simple general solution of the integral equation for the contact pressure. Using this equation, he calculated the distribution of pressure under a flat-ended block subjected to non-axial force, and also the pressures under a variety of shapes of axially loaded rigid blocks. A number of these problems have been discussed independently by SNEDDON [4] using a Fourier transform method, and by SEN [5], [6] using a complex function method. However, SCHUBERT's method of solution is the simplest.

Recently, OKUBO [7] has re-examined his earlier work, and has extended its results by assuming that the block is flexible but ignoring the frictional forces. He has given graphs of the contact pressures and deformation shapes for several ratios of the moduli of the block and half plane.

The present work is concerned with the contact pressure between a rigid block and an orthotropic half plane, some physically interesting results being obtained.

### Analysis

Consider an orthotropic half plane whose plane boundary corresponds with the  $x$ -coordinate axis, the plane being subjected to a normal concentrated load  $P$  acting at the origin. Assuming that the  $x$ -,  $y$ -coordinate axes correspond with the

<sup>1)</sup> Cornell University, College of Engineering, Dept. of Mechanics.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 404.



principal axes of orthotropy, it can be shown that the stresses [8] are given by

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{P (\alpha_1 + \alpha_2) x^2 y}{\pi (\alpha_1^2 x^2 + y^2) (\alpha_2^2 x^2 + y^2)}, \\ \sigma_y &= \frac{P (\alpha_1 + \alpha_2) y^3}{\pi (\alpha_1^2 x^2 + y^2) (\alpha_2^2 x^2 + y^2)}, \\ \tau_{xy} &= \frac{P (\alpha_1 + \alpha_2) x y^2}{\pi (\alpha_1^2 x^2 + y^2) (\alpha_2^2 x^2 + y^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

where  $\alpha_1^2 \alpha_2^2 = S_{11}/S_{22}$  and  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = (S_{66} + 2 S_{12})/S_{22}$ , the elastic constants being defined by the stress-strain equations

$$\varepsilon_x = S_{11} \sigma_x + S_{12} \sigma_y, \quad \varepsilon_y = S_{22} \sigma_y + S_{12} \sigma_x, \quad \gamma_{xy} = S_{66} \tau_{xy}. \quad (2)$$

Substituting the first two of equations (1) in the second of equations (2), integrating, and assuming that the displacement  $v = 0$  at  $x = \pm a$ ,  $y = 0$ , it is found that

$$v = \frac{P}{2 \pi (\alpha_1 - \alpha_2)} \left[ (\alpha_1^2 S_{22} - S_{12}) \log \frac{\alpha_1^2 x^2 + y^2}{\alpha_1^2 a^2} - (\alpha_2^2 S_{22} - S_{12}) \log \frac{\alpha_2^2 x^2 + y^2}{\alpha_2^2 a^2} \right]. \quad (3)$$

It follows that

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{y=0} = v_{x,0}^1(x) = \frac{P (\alpha_1 + \alpha_2) S_{22}}{\pi x}. \quad (4)$$

Thus an incremental load  $p(u) du$  at  $u$  from the origin gives

$$v_{x,0}^1(x) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) S_{22}}{\pi} \cdot \frac{p(u) du}{x - u} \quad (5)$$

and the slope of the half plane under a block of length  $2A$  is

$$\frac{1}{2 (\alpha_1 + \alpha_2) S_{22}} v_{x,0}^1(x) = \frac{1}{2 \pi} \int_{-A}^A \frac{p(u) du}{x - u}. \quad (6)$$

For isotropy,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  and writing  $S_{22} = 1/E$  in the usual notation, we have

$$\frac{E}{4} v_{x,0}^1(x) = \frac{1}{2 \pi} \int_{-A}^A \frac{p(u) du}{x - u}. \quad (7)$$

Using a solution due to HAMEL [9], SCHUBERT [3] has shown that equation (7) gives the distribution of contact pressure in the form

$$p(u) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - u^2}} \left[ P + \frac{E}{2} \int_{-A}^A \frac{v_{x,0}^1(x) \sqrt{A^2 - x^2}}{x - u} dx \right]. \quad (8)$$

It follows that the results for various shapes of blocks found from equation (8) will also apply to an orthotropic half plane if  $E$  is replaced by the effective modulus

$$E_1 = \frac{2}{(\alpha_1 + \alpha_2) S_{22}}.$$

The block of greatest interest is that having a flat end, and this will be considered in detail.

For axial loading,  $v_{x,0}^1(x)$  in the integral in equation (8) is zero and the well known result follows

$$p(u) = \frac{P}{\pi \sqrt{A^2 - u^2}}. \quad (9)$$

If the load is applied with an eccentricity  $b$  and contact is made over the entire length of the block,  $v_{x,0}^1(x) = \beta$  (a constant), the slope of the contact surface, the orthotropic version of equation (8) becomes

$$p(u) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - u^2}} \left[ P + \frac{\pi}{2} E_1 \beta u \right]. \quad (10)$$

For equilibrium

$$P b = \int_{-A}^A p(u) u \, du = \frac{\pi}{4} E_1 A^2 \beta \quad \therefore \quad \beta = \frac{4 P b}{\pi E_1 A^2}.$$

Thus

$$p(u) = \frac{P}{\pi \sqrt{A^2 - u^2}} \left[ 1 + 2 \frac{b u}{A^2} \right]. \quad (11)$$

If  $b > A/2$ , it follows that contact will cease over part of the block. Assuming that the contact length is  $2a$ , where  $a < A$ , it follows from equilibrium that

$$P [b - (A - a)] = \int_{-a}^a p(u) u \, du = \frac{\pi}{4} E_1 a^2 \beta$$

and

$$p(u) = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - u^2}} \left\{ 1 + \frac{2 [b - (A - a)] u}{a^2} \right\}. \quad (12)$$

Now  $p(-a) = 0$ ,  $a = 2(A - b)$  and, from equation (12)

$$p(u) = \frac{P}{2 \pi (A - b)} \sqrt{\frac{2(A - b) + u}{2(A - b) - u}}. \quad (13)$$

All the above results, repeated from the work of SCHUBERT (3), are independent of the elastic constants of the half plane. Thus it follows that the pressure distribution under a flat-ended block subjected to any loading is independent of the elastic constants of the half plane, including the special case where  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  and the half plane is isotropic. This statement is only true for flat-ended blocks, and is not true for blocks having other contact surfaces, although the form of the pressure distribution will be the same.

## REFERENCES

- [1] M. SADOWSKY, *Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie*, Z. angew. Math. Mech. 8, 107 (1928).
- [2] H. OKUBO, *The Stress Distribution in a Semi-Infinite Domain Having a Plane Boundary and Compressed by a Rigid Body*, Z. angew. Math. Mech. 20, 271 (1940).

- [3] G. SCHUBERT, *Zur Frage der Druckverteilung unter elastisch gelagerten Tragwerken*, Ing. Arch. 13, 132 (1942).
- [4] I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1951), Art. 49.
- [5] B. SEN, Bull. Calcutta math. Soc. 38, 117 (1946).
- [6] B. SEN, *Note on Two-Dimensional Indentation Problems of a Non-Isotropic Semi-Infinite Elastic Medium*, ZAMP 5, 83 (1954).
- [7] H. OKUBO, *On the Two-Dimensional Problem of a Semi-Infinite Elastic Body compressed by an Elastic Plane*, Quart. J. Math. Appl. Mech. 4, 260 (1951).
- [8] A. E. GREEN and G. I. TAYLOR, *Stress Systems in Anisotropic Plates I*, Proc. Roy. Soc. [A], 173, 162 (1939).
- [9] G. HAMEL, *Integralgleichungen* (Berlin, 1937).

### Zusammenfassung

Der Verfasser findet eine allgemeine Lösung für die Verteilung des Druckes zwischen einem Block und einer orthotropen Halbebene. Es wird gezeigt, dass die Verteilung des Druckes für den flachen Block mit allgemeiner Belastung unabhängig ist von den elastischen Eigenschaften der Halbebene und auch genau dieselbe, als ob die Halbebene isotrop wäre.

(Received: May 7, 1955.)

## On the Oscillating Cylinder Viscometer

By ALI A. K. IBRAHIM and ABDEL MONEM I. KABIEL, Alexandria, Egypt<sup>1)</sup>

In our paper the theory of an oscillating cylinder viscometer part II<sup>2)</sup>, the relationship [Ref. 2, equ. (16)] between the magnification factor  $\theta_0/\Phi_0$  the viscosity  $\eta$  of a Newtonian liquid and the constants of the apparatus was given. This relationship, although it covers liquids of any density and viscosity, is not a direct relation between  $\eta$  and the other constants of the apparatus. A disadvantage which has been already found in previous derived equations.

In the same paper<sup>2)</sup>, the previous relationship was approximated and a simple formula for the viscosity  $\eta$  [Ref. 2, equ. (19)] was deduced. Unfortunately, this formula is applicable only to Newtonian liquids with  $\eta > 1$ .

The object of the present note is to make the first relation [Ref. 2, equ. (16)] direct and applicable to Newtonian liquids with all values of  $\eta$ .

Introduce a dimensionless parameter defined by

$$\sqrt{2} B R = \frac{3}{2} [(2x - 1)^2 - 1]^{1/4}, \quad (1)$$

where  $x$  may take any value, say 1, 2, 3, 4, ...

<sup>1)</sup> Physics Department, Faculty of Science, University of Alexandria.

<sup>2)</sup> *The theory of an oscillating cylinder viscometer*, Part II, ALI A. K. IBRAHIM and ABDEL MONEM I. KABIEL, Z. angew. Math. Phys. 5, 398 (1954).

Thus, it is found that

$$\left(\frac{\theta_0}{\Phi_0}\right)^2 = \psi_d^2 = e^{(6d)/R} \frac{C_1^2 + D_1^2}{C_1^2 + D_1^2 + A_2' + B_2' + C_2' + D_2'}, \quad (2)$$

where

$$C_1^2 = \frac{9}{4 R^2} x,$$

$$D_1^2 = \frac{9}{4 R^2} (x - 1),$$

$$A_2' = \left\{ \gamma_1'^2 \omega^2 - \frac{9}{2 R^2} (x - 1) \right\} \sin^2 \frac{3d}{R} \sqrt{x-1},$$

$$B_2' = \frac{3}{2 R} \left\{ \frac{3}{2 R} \sqrt{x-1} - \gamma_1' \omega \sqrt{x} \right\} \sin \frac{6d}{R} \sqrt{x-1},$$

$$C_2' = \left\{ \gamma_1'^2 \omega^2 + \frac{9}{2 R^2} x \right\} \sinh^2 \frac{3d}{R} \sqrt{x},$$

$$D_2' = \frac{3}{2 R} \left\{ \frac{3}{2 R} \sqrt{x} + \gamma_1' \omega \sqrt{x-1} \right\} \sinh \frac{6d}{R} \sqrt{x},$$

and

$$\gamma_1' = \frac{9 (I \omega^2 - \tau) \sqrt{(2x-1)^2 - 1}}{8 \pi L R^2 \varrho a^3 \omega^3}.$$

Equation (2) satisfies the experimental curve only in one point of a certain value of ( $n_s$  and  $\psi_s$ ).

Hence, from (1) we have,

$$\eta = \frac{8 \pi R^2 \varrho}{9 \sqrt{(2x-1)^2 - 1}} n_s, \quad (3)$$

from which  $\eta$  is calculated.

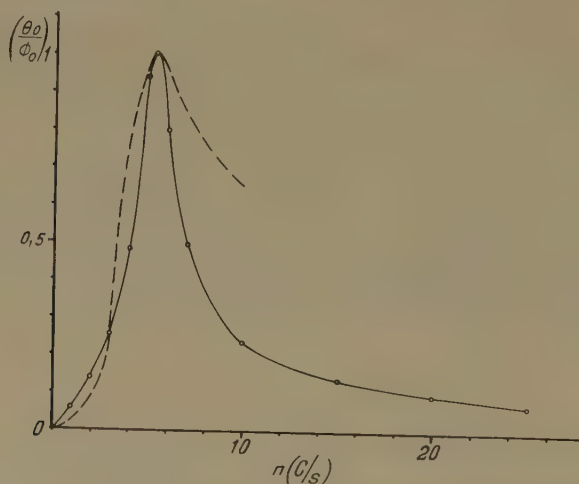


Figure 1

The variation of  $\theta_0 / \Phi_0(n)$  for paraffin oil.

## Experimental verification:

Using the dimensions of OLDROYD'S, STRAWBRIDGE'S, and TOMS' apparatus<sup>1)</sup>, and taking  $\kappa = 10$ , say, equation (2) becomes

$$\left(\frac{\theta_0}{\Phi_0}\right)^2 = \psi^2_{-d} = \frac{10.93 n^4}{41.42 n^4 - 1834 n^2 + 27620}. \quad (4)$$

Hence, on plotting the curve represented by this equation on the experimental curve obtained by OLDROYD, STRAWBRIDGE, and TOMS (see fig. 1), the point of intersection corresponds to a value  $n_g = 3 \text{ s}^{-1}$ .

Hence, substituting in (3) we have

$$\eta = 1.74 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}.$$

This is in good agreement with what was found in tables.

*Zusammenfassung*

Bei Einführung eines dimensionslosen Parameters ist es möglich, die Beziehung [1, Gleichung (16)] direkt herzuleiten und auf Newtonsche Flüssigkeiten mit allen Werten von  $\eta$  anzuwenden.

(Received: February 19, 1955).

## Mechanismus der Vereisung unterkühlter Wassertropfen durch disperse Keimsubstanzen

VON HANS RUDOLF PRUPPACHER und RAYMUND SÄNGER, Zürich<sup>2)</sup>

### I. Experimentelle Untersuchungen über die Eiskeimfähigkeit der Stoffe

#### A. Einleitung

Die Niederschlagsbildung stellt ein sehr wichtiges Problem der physikalischen Meteorologie dar. Die Zahl der bis jetzt angestellten experimentellen und theoretischen Untersuchungen ist sehr mannigfaltig, zeigt aber, dass man noch weit davon entfernt ist, ein einheitliches Bild über den Mechanismus der Phasenübergänge von Wasser geben zu können. Vor allem sind die Vorgänge, welche im Vereisungsprozess eine Rolle spielen, noch sehr unabgeklärt. Im Vordergrund steht dabei die Frage der Eiskeimfähigkeit der Stoffe, das heisst ihre Eigenschaft, die Vereisung unterkühlter Wassertropfen einleiten zu können<sup>3)</sup>. Um vermehrten Einblick in die Vorgänge zu gewinnen, sind die nachstehend beschriebenen Untersuchungen angestellt worden, welche im Sommer 1954 begonnen und vor kurzem abgeschlossen wurden.

1) OLDROYD, STRAWBRIDGE, and TOMS, Proc. Phys. Soc. (London) [B] 64, 44 (1951).

2) Physikalisches Institut der ETH.

3) Mit dem Ausdruck « Eiskeimfähigkeit » soll angedeutet werden, dass die Frage, ob es sich um Gefrier- oder Sublimationskerne handelt, in dieser Arbeit im wesentlichen noch offengelassen wird.



## B. Durchführung der Versuche

Die Versuche erfolgten in einer Kühltruhe der Marke «Hill» nach dem Verfahren von SCHAEFER-VONNEGUT<sup>1)</sup>. Der Innenraum der Truhe bestand aus vier Kühlkammern, die nur durch eine schmale Öffnung am Boden der Truhe miteinander in Verbindung standen. In der Kammer, in welcher die Experimente durchgeführt wurden (Volumen etwa 80 l), war ein Holzgestell eingepasst, das zum Teil mit schwarzem Chiffon und zum Teil mit schwarzer Gaze überzogen war. In der vorderen Seite der Kühltruhe befand sich ein dreifach verglastes Beobachtungsfenster. Der obere Teil der Truhe war zur Hälfte durch das Kühlsystem und zur Hälfte von einer eingepassten Plexiglasplatte abgedeckt, in welcher sich über der Untersuchungskammer ein Loch zur Einführung der Feuchte und der Impfschubstanz befand. Pro Tag wurden nur Untersuchungen bei einer bestimmten Thermostateinstellung durchgeführt. Durch fünfstündige Vorkühlung bei dieser Einstellung gelang es, bis zu Versuchsbeginn den Temperaturunterschied zwischen Boden und Plexiglasdecke der Kühltruhe auf 10° C zu reduzieren.

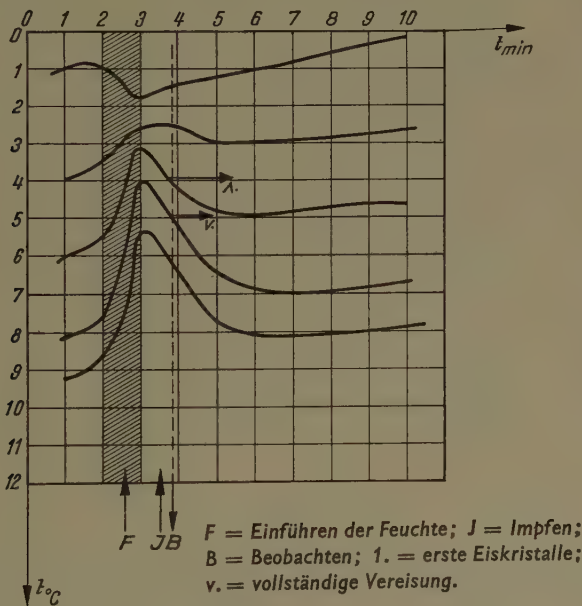
Zur Beobachtung wurde eine Projektionslampe (150 W) verwendet, deren Licht mit Hilfe eines beweglichen Spiegels nur im Moment der Beobachtung in die Kammer gelenkt wurde. Damit konnte die örtliche Erwärmung durch die Strahlung auf ein Minimum gesenkt werden.

Die feine Zerteilung der Impfschubstanzen erfolgte nicht durch Verdampfen, sondern durch Luftzerstäubung der fein pulverisierten Substanzen. So war es möglich, die Zersetzungserscheinungen infolge Wärme und Luftsauerstoff zu umgehen und die Kristallstruktur der Substanz vor der Einstäubung eindeutig festzulegen. Die Substanzen wurden in einem Achatmörser pulverisiert (Teilchendurchmesser um  $0,5\text{--}2 \cdot 10^{-4}$  cm) und durch einen  $10\text{-cm}^3$ -Puderzerstäuber aus Plastik zerstäubt. Substanzen mit blättrigem, weichem oder biegsamem Charakter wurden zusammen mit Glas, das bis  $-18^\circ\text{C}$  nicht keimfähig ist, pulverisiert und so in sehr feine Form gebracht. Hygroskopische Substanzen wurden durch fortgesetztes Pulverisierungs- und Trocknungsverfahren in feinzerteilte Form gebracht. Nur im Falle von KI, NaI,  $\text{AgNO}_3$  und  $\text{I}_2$  musste das Rauchverfahren angewendet werden. Zur Reinigung der Luft in der Kühltruhe nach den Impfversuchen verwendete man ein Elektrofilter der Marke «Trion».

Für die Temperaturmessung sind 5 verschiedene Thermometerarten (Quecksilberthermometer, Widerstandsplattenthermometer, Bimetaltorsionsthermometer, Thermistoren und Thermoelemente) nach 3 Gesichtspunkten geprüft worden: Ein gutes und rasches Anpassungsvermögen des temperaturempfindlichen Teiles an eine gegebene Aussentemperatur, eine grosse Empfindlichkeit des Anzeigeorgans und eine möglichst geringe Platzbeanspruchung des temperaturempfindlichen Teiles. Das erste Kriterium ist an Hand von Temperaturangleichungsdiagrammen untersucht worden, die für die einzelnen Thermometer aufgenommen wurden. Als weitaus am günstigsten erwiesen sich die Thermoelemente (Kupfer/Konstantan, 0,1 mm Durchmesser) und die Thermistoren Philips 83900-1). Zur Gewährleistung einer möglichst guten Kontrolle der Temperatur wurden beide Thermometerarten mit Hilfe verschiedener Instrumente geeicht und je sechs links und rechts in vertikaler Richtung in der Kammer montiert. Um Turbulenzen in der Kammer auf ein Minimum zu reduzieren, sind auch bei den Thermistoren sehr dünne Zuleitungsdrähte verwendet worden.

<sup>1)</sup> V. J. SCHAEFER, Chem. Rev. 44, 291 (1949); B. VONNEGUT, Chem. Rev. 44, 277 (1949).

Mit dieser Temperaturmessanlage wurde der Temperaturverlauf in der ungestörten Kühltruhe nach Einschalten der Beobachtungslampe und nach der Erzeugung des Nebels durch Hineinhauchen kontrolliert. Währenddem der Einfluss der Lampe nur wenige Zehntelsgrad betrug, zeigte sich nach einem fünf- bis siebenmaligen Einhauchen ein Temperaturanstieg an allen Messpunkten von etwa 7 bis 12°C. Das Absinken der Temperatur erfolgte anfangs sehr rasch, war aber schliesslich erst nach 7 min auf den Wert der ungestörten Kühltruhe gesunken.



Figur 1  
Temperatur-Diagramm zu Impfexperiment CuS.

Da die Impfung in den ersten 2 min nach der Nebelerzeugung erfolgen musste, konnte daraus geschlossen werden, dass trotz der guten Anpassungsfähigkeit der verwendeten Thermometer die Hauchmethode sich für Keimfähigkeitsuntersuchungen nicht eignete.

Mit Hilfe eines Mikroflüssigkeitszerstäubers war es möglich, den Nebel durch direkte Zerstäubung des Wassers zu erzeugen. Infolge der geringen Luftmenge, die zur Zerstäubung nötig war, und des Wegfalls der Kondensationswärme gelang es, die Temperaturschwankung auf etwa 3°C zu reduzieren. Damit war eine gute Erfassung der Temperatur im Moment der Vereisung gewährleistet. Um über die Temperaturverhältnisse während jedes Impfversuchs genau orientiert zu sein, wurden jeweils 4 Temperaturgradientmessungen rasch hintereinander vorgenommen: in ungestörten Verhältnissen; nach der Nebelerzeugung; nach der Impfung und nach der Beobachtung. Figur 1 illustriert den gemessenen zeitlichen Temperaturgang in der Kühlkammer während eines Impfversuches mit CuS, aufge-

nommen in verschiedenen Höhen der Kammer<sup>1)</sup>. Der vor der Feuchteinführung und nach der Impfung im Bilde deutlich wahrnehmbare allgemeine Temperaturanstieg zeigt das Temperaturverhalten während den Arbeitspausen des Kühlaggregates.

Die Auswahl der Substanzen erfolgte zunächst rein kristallographisch-chemisch, später hauptsächlich in Hinsicht der Polarisierbarkeit der Gitterbausteine.

Um möglichst genaue Kenntnisse von der chemischen und kristallographischen Reinheit der vorliegenden Substanzen zu erhalten, wurde ein Drittel der Impfsubstanzen röntgenographisch untersucht. Unter diesen befanden sich alle die Substanzen, die im Temperaturintervall 0° bis -10°C Eiskeimfähigkeit zeigten. Die Untersuchung ergab, dass keine chemischen Verunreinigungen vorlagen. Dagegen zeigten sich bei einigen Substanzen kristallographische Verunreinigungen. Im Falle des AgI- und ZnS-Präparates, in denen zwei kristallographische Modifikationen zugleich anwesend waren, gelang es aber leicht, die beiden Modifikationen zu erkennen und wenigstens approximativ ihre Mengenverhältnisse anzugeben.

Zur Gewährleistung der Sauberkeit der Oberflächen waren nur frische und gut getrocknete Substanzen angewandt worden. Es wurde ferner darauf geachtet, Präparate zu erhalten, die unmittelbar vor der Einstäubung in den Nebel im Mörser zerkleinert werden konnten, so dass frische Spaltflächen vorlagen.

Teilweise wurden die Impfstoffe selber laboratoriumsmässig dargestellt; diese umfassen die Stoffe: CuS, MnS, Ag<sub>2</sub>S, PbS, CoS, CdSe, ZuSe, Ag<sub>2</sub>Se, CuSe, HgTe, CdTe, InSb, SiMg<sub>2</sub>, Cu<sub>2</sub>O, Ag<sub>2</sub>O, Ag<sub>2</sub>Cr<sub>2</sub>O<sub>7</sub>, CuI, CuBr, CuCl, TIH, PbI<sub>2</sub>, PbCl<sub>2</sub>, HgI<sub>2</sub>, AuI, AgCl, AgI. Die übrigen Stoffe wurden vom B.D.H. Laboratory, London (British Drug Houses Ltd.), von Bender & Hobein, Zürich (Vertretung der Merck & Co.), und der Chemischen Fabrik Fluka in Buchs (SG) bezogen.

### C. Messergebnisse

Die Wirkungstemperaturen, welche für die untersuchten Impfsubstanzen gefunden worden waren, sind in Tabelle 1 zusammengestellt. In der ersten Zahlenkolonne sind die Temperaturen jener Kühlkammerhöhe angegeben, bei welcher die ersten Eiskristalle in Erscheinung getreten sind, in der zweiten Kolonne die Temperaturen jener Höhe, auf welcher vollständige Vereisung des Nebels erfolgt war.

Die beobachteten Wirkungstemperaturen lassen sich in fünf Gruppen einordnen: -4° bis -5,5°; -5,5° bis -7,5°; -10° bis -14°; -14° bis -17°;

<sup>1)</sup> Für den zeitlichen Temperaturverlauf in der durch Einführung der Feuchte, das heisst der Tröpfchenluft, gestörten Kühlkammer kann auf theoretischem Wege die Formel

$$T - T_r = \frac{T_1 - T_0}{k_r - k_K} [k_r e^{-k_r \tau} - k_K e^{-k_K \tau}]$$

hergeleitet werden. Hierin bedeuten  $T$  die wahre Temperatur der Luft in der Kühltruhe,  $T_r$  die Temperatur des Thermometers,  $T_0$  jene der Kühltruhenwand (hier als konstant vorausgesetzt),  $T_1$  jene der eingeführten Tröpfchenluft und  $\tau$  die Zeit.  $k_r$  bzw.  $k_K$  sind Konstante, die durch die Ausdrücke

$$k_r = \frac{\lg 2}{\tau^*} \quad \text{bzw.} \quad k_K = \frac{\lg 2}{\tau_K^*}$$

gegeben sind, worin  $\tau_r^*$  bzw.  $\tau_K^*$  die Halbwertzeiten für die Angleichung der Temperatur des Thermometers an die Lufttemperatur bzw. der Lufttemperatur an die Temperatur der Kühltruhenwand darstellen.

Tabelle 1  
*Wirkungstemperaturen der untersuchten Impfsbstanzen*

	Erste Eis- kristalle °C	Vollständige Vereisung °C
Silberjodid ( $\beta$ -, $\gamma$ -AgI) . . . . .	— 4,0	— 5,2
Silbersulfid ( $\text{Ag}_2\text{S}$ + Glas) . . . . .	— 4,2	— 5,3
Cuprojodid ( $\text{CuI}$ ) . . . . .	— 4,2	— 5,5
Cuprisulfid ( $\text{CuS}$ ) . . . . .	— 4,0	— 4,7
Cupriselenid ( $\text{CuSe}$ ) . . . . .	— 4,2	— 5,3
Kadmiumtellurid ( $\text{CdTe}$ ) . . . . .	— 4,1	— 5,1
Bleijodid ( $\text{PbI}_2$ ) . . . . .	— 5,2	— 6,5
Vanadiumpentoxyd ( $\text{V}_2\text{O}_5$ ) . . . . .	— 5,7	— 6,6
Mercuritellurid ( $\text{HgTe}$ ) . . . . .	— 5,0	— 6,2
Silberoxydul ( $\text{Ag}_2\text{O}$ ) . . . . .	— 6,2	— 7,2
Kupferoxydul ( $\text{Cu}_2\text{O}$ ) . . . . .	— 5,1	— 6,1
Kadmiumselenid ( $\text{CdSe}$ ) . . . . .	— 5,0	— 6,5
Silbernitrat ( $\text{AgNO}_3$ -Rauch) . . . . .	— 6,5	— 7,0
Quarz ( $\text{SiO}_2$ ) . . . . .	— 12,3	— 13,0
Porzellan . . . . .	— 11,6	— 13,5
Grammatit . . . . .	— 9,0	— 12,0
Olivin (Peridot) . . . . .	— 12,3	— 13,5
Lehm . . . . .	— 10,8	— 13,5
Goldjodid ( $\text{AuI}$ ) . . . . .	— 8,0	— 10,0
Kupferoxyd ( $\text{CuO}$ ) . . . . .	— 11,7	— 13,4
Zinkselenid ( $\text{ZnSe}$ ) . . . . .	— 12,3	— 14,0
Silberchlorid ( $\text{AgCl}$ + Glas) . . . . .	— 11,0	— 13,0
Mercurchlorid ( $\text{Hg}_2\text{Cl}_2$ ) . . . . .	— 11,2	— 13,1
Mangandioxyd ( $\text{MnO}_2$ ) . . . . .	— 12,5	— 14,0
Tellur ( $\text{Te}$ ) . . . . .	— 12,5	— 13,6
Kaliumjodid ( $\text{KI}$ -Rauch) . . . . .	— 12,0	— 13,3
Natriumjodid ( $\text{NaI}$ -Rauch) . . . . .	— 11,8	— 13,5
Silberbichromat ( $\text{Ag}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ ) . . . . .	— 12,0	— 14,0
Jodoform ( $\text{CHI}_3$ ) . . . . .	— 12,0	— 13,0
$\beta$ -Zinn ( $\beta$ -Sn) . . . . .	— 12,0	— 13,9
Kieselgur . . . . .	— 10,5	— 12,5
Aktivkohle . . . . .	— 12,5	— 14,0
Bleichlorid ( $\text{PbCl}_2$ ) . . . . .	— 12,0	— 13,9
Mercurijodid ( $\text{HgI}_2$ ) . . . . .	— 13,0	— 14,0
Silberselenid ( $\text{Ag}_2\text{Se}$ + Glas) . . . . .	— 11,5	— 13,0
Indiumantimon ( $\text{InSb}$ ) . . . . .	— 15,5	— 17,0
Kadmiumjodid ( $\text{CdI}_2$ ) . . . . .	— 15,0	— 17,0
Stannooxyd ( $\text{SnO}$ ) . . . . .	— 13,5	— 15,5
Berylloxyd ( $\text{BeO}$ ) . . . . .	— 14,0	— 15,0
Thallojodid ( $\text{TlI}$ + Glas) . . . . .	— 14,5	— 17,0
Kadmiumsulfid ( $\text{CdS}$ ) . . . . .	— 14,4	— 16,0
Kali-Alaun ( $\text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$ ) . . . . .	— 14,6	— 17,0
Ammonium-Alaun ( $\text{NH}_4\text{Al}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$ ) . . . . .	— 15,0	— 17,0

Nicht wirksam bis  $-18^\circ$  sind:

$\text{Mg}(\text{OH})_2$ ,  $\text{Ca}(\text{OH})_2$ ,  $\text{SrF}_2$ ,  $\text{BaF}_2$ ,  $\text{MgF}_2$ ,  $\text{CaF}_2$ ,  $\text{CdF}_2$ ,  $\text{ZnF}_2$ ,  $\text{NaF}$ ,  $\text{LiF}$ ,  $\text{ZnO}$ ,  $\text{SnO}_2$ ,  
 $\text{CaO}$ ,  $\text{BaO}$ ,  $\text{SrO}$ ,  $\text{MgO}$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{CuCl}$ ,  $\text{CuBr}$ ,  $\text{HgBr}_2$ ,  $\text{NH}_4\text{Cl}$ ,  $\text{NH}_4\text{Br}$ ,  $\text{NH}_4\text{I}$ ,  $\text{I}_2$ ,  $\text{ZnS}$ ,



PbS, CoS,  $\text{MnS}_{\text{grün}}$ ,  $\text{NH}_4\text{F}$ , NaCl, KCl,  $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{S}_{\text{amorph}}$ ,  $\text{S}_{\text{krist}}$ , Si, SiC, Biotit, Orthoklas,  $\text{SiMg}_2$ , Al, Cu, Sb,  $\text{SrSO}_4$ ,  $\text{PbSO}_4$ ,  $\text{BaSO}_4$ ,  $\text{CaSO}_4$ ,  $\text{MnSO}_4 \cdot 1\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{MnCO}_3$ ,  $\text{FeCO}_3$ ,  $\text{BaCO}_3$ ,  $\text{ZnCO}_3$ ,  $\text{SrCO}_3$ ,  $\text{CaCO}_3$ ,  $\text{CdCO}_3$ ,  $\text{PbCO}_3$ ,  $\text{MgCO}_3$ , Graphit, Koks, Koksasche, Zigarettenasche, Glas.

Total 104 Substanzen, davon 61 inaktiv und 43 aktiv.

Wirkungstemperatur unterhalb  $-18^\circ$ . Wird die Anzahl der aufgetretenen Vereisungen (je eine Vereisung pro Substanz gerechnet) in Abhängigkeit von der Temperatur graphisch aufgezeichnet, so ergeben sich für das Auftreten von ersten Eiskristallen Maxima bei  $-4,5^\circ$  und  $-12^\circ$ , für das Auftreten von vollständigen Vereisungen Maxima bei  $-5,7^\circ$  und  $-13,5^\circ$ .

Während der Keimfähigkeitsexperimente wurde folgendes Verhalten der Impfsubstanzen beobachtet:

1. Wasserlösliche oder durch Wasser zersetzbare Substanzen wirkten bis  $-18^\circ$  überhaupt nicht ( $\text{CaO}$ ,  $\text{SrO}$ ,  $\text{NH}_4\text{F}$ , KCl, NaCl,  $\text{NH}_4\text{Cl}$ ,  $\text{NH}_4\text{Br}$ ), oder aber sie wirkten erst bei Temperaturen tiefer als  $-12^\circ$  ( $\text{CdI}_2$ , KI, NaI).

2. Während einige Substanzen eine grosse Latenzzeit aufwiesen ( $\text{PbI}_2$  rund 30 s), zeigte sich bei den meisten sofortiges Einsetzen der Vereisung (5 bis 10 s).

3. Es war nicht festzustellen, dass keimfähige Substanzen besonders trocken sein mussten.

## D. Übersichtsmässige Erörterung der Befunde

### a) Einfluss des kristallinen Aufbaus auf die Eiskeimfähigkeit

Ordnet man die untersuchten Impfsubstanzen rein nach kristallographischen Gesichtspunkten, so können folgende Aussagen gemacht werden:

1. Die Substanzen lassen sich in 44 Gittertypen einordnen. Obwohl gewisse Gittertypen, wie zum Beispiel der Fluorittyp oder Cäsium-Chlorid-Typ unter den aktiven Substanzen nicht vertreten sind, andere, wie zum Beispiel der Rutil- oder Steinsalztyp, nur sehr schwach, der Zinkblendetyp dagegen eher stärker vertreten ist, zeigt sich keine besondere Bevorzugung irgendeines bestimmten Kristallbauschemas.

2. Auch die Symmetrieverhältnisse scheinen keine entscheidende Rolle als Ursache für die Eiskeimfähigkeit zu spielen. Von den 44 keimfähigen Substanzen ( $\beta\text{-AgI}$  und  $\gamma\text{-AgI}$  als je eine Substanz gerechnet) weisen nur 10, also etwa 23%, hexagonale oder trigonale Symmetrie auf. Die restlichen 77% zeigen andere Symmetrieverhältnisse: 14 Substanzen sind kubisch, 5 tetragonal, 13 orthorhombisch, monoklin oder triklin, und 2 sind amorph.

Betrachtet man dieses Kriterium nur innerhalb der Substanzen, die im Temperaturgebiet von  $0^\circ$  bis  $-10^\circ$  keimfähig sind, so ergibt sich folgende Verteilung auf die 8 vorliegenden Gittertypen: 4 Substanzen sind hexagonal oder trigonal, 7 sind kubisch und 3 sind orthorhombisch.

3. Untersucht man die keimfähigen Substanzen bezüglich der Teilchenabstände, die sich auf einer Spalt- oder Wachstumsfläche auswirken können, so gelangt man zu einem interessanten Ergebnis:

Berechnet man für keimfähige Substanzen, welche die kubische Zinkblende-Struktur besitzen, also ein von Eis sehr abweichendes Gitter und andere Gitterkonstanten aufweisen, den sehr oft auftretenden Teilchenabstand  $a_0/\sqrt{2}$ , so gelangt man zu Werten, die jetzt dem Wert für die Tetraederkantenlänge im Eisgitter ( $4,51 \text{ \AA}$ ) sehr nahe kommen. Ähnliche Beobachtungen kann man auch bei der Berechnung von besonderen Abständen an anderen Gittern machen.



Man gelangt schliesslich zum Resultat, dass von den 44 aktiven Substanzen 2/3 Abstände aufweisen, welche innerhalb einer 7%igen Abweichung des Abstandes  $4,51 \text{ \AA}$  im Eisgitter liegen. Unter den restlichen Substanzen sind noch 50%, deren Abstände unbekannt sind, das heisst, es ist durchaus möglich, dass auch diese günstige Abstände aufweisen. So besitzen also im besten Falle noch 1/6 der Substanzen von Eis abweichende Abstände.

Betrachtet man nur die 14 aktivsten Substanzen ( $-4^\circ$  bis  $-7^\circ$ ), so ergibt sich, dass für 12 Substanzen die Abweichungen der Abstände gegenüber dem Abstand  $4,51 \text{ \AA}$  im Eisgitter nur noch maximal 4,5% sind. Es verbleiben noch 2 Substanzen, deren Abstand stark differieren:  $\text{AgNO}_3$  und  $\text{V}_2\text{O}_5$  ( $\text{V}_2\text{O}_5$  weist ebenfalls einen günstigen Abstand auf, dieser kann sich aber nur bei besonderen, kaum möglichen Spaltverhältnissen auswirken). Bemerkenswert ist, dass bei  $\text{CuS}$  und besonders  $\text{CuSe}$  der doppelte Wert des Abstandes  $\text{Cu}-\text{S} = 2 \times 2,19 \text{ \AA} = 4,38 \text{ \AA}$  bzw.  $\text{Cu}-\text{Se} = 2 \times 2,275 \text{ \AA} = 4,55 \text{ \AA}$  in der (0001)-Fläche nur eine geringe Differenz zum Abstand  $4,51 \text{ \AA}$  im Eisgitter zeigt.

Dehnt man die Berechnungen der Teilchenabstände, die sich auf Spalt- oder Wachstumflächen auswirken können, auf die als inaktiv gefundenen Substanzen aus, so gelangt man aber auch hier zum Ergebnis, dass noch viele Substanzen günstige Abstände aufweisen. Von den 61 Substanzen besitzen 31% Abstände, deren Abweichungen geringer, ja sogar viel geringer als 7% sind.

Vergleicht man noch die Impfsubstanzen  $\text{InSb}$ ,  $\text{CdTe}$ ,  $\text{AgI}$  (isoelektrische Reihe) und  $\text{HgTe}$ , die alle denselben Gittertypus, dieselbe Symmetrie und sehr ähnliche geometrische Abmessungen aufweisen, so müsste die Reihenfolge der Keimfähigkeit sein:

$\text{HgTe}$ , besser als  $\text{CdTe} = \text{InSb}$ , besser als  $\text{AgI}$ .

Die experimentellen Keimfähigkeitsuntersuchungen zeigen aber, dass die Reihenfolge eine ganz andere ist:

$\text{CdTe} = \text{AgI}$ , besser als  $\text{HgTe}$ , viel besser als  $\text{InSb}$ .

Überlegt man sich den Fall von orientiertem Aufwachsen von Eis auf einer Impfsubstanz, so muss noch folgende Erscheinung berücksichtigt werden:

Vergleicht man zum Beispiel die Teilchenabweichungen, die sich ergeben würden beim Aufwachsen einer Eisgittergeraden auf einer Gittergeraden auf der (0001)-Fläche der sehr gut keimfähigen Impfsubstanzen  $\text{CuS}$  oder  $\text{AgI}$ , so gelangt man zum Resultat, dass die Abweichungen zu den nächsten Nachbarn anfänglich wohl günstig sind (besonders bei  $\text{AgI}$ ), sich aber dann verschlechtern, um erst nach relativ grosser Periode wieder besser zu werden (besonders bei  $\text{AgI}$  ausgeprägt). Bei der bis  $-18^\circ$  nicht keimfähigen Substanz  $\text{ZnS}$  zeigt sich auf der (0001)-Fläche anfänglich eine relativ grosse Abweichung, die aber sehr rasch auf einen geringen Wert vermindert wird.

Es wird aus diesen Überlegungen klar, dass nicht nur die Abweichungen des Teilchenabstandes  $4,51 \text{ \AA}$  im Eisgitter von einem bestimmten Elementarabstand auf dem Impfkristall betrachtet werden dürfen, sondern dass das gegenseitige Verhalten der Teilchenlagen während des ganzen Aufwachsvorganges studiert werden muss.

Es ist klar, dass solche Vergleiche nur approximativ möglich sind. Für nähere Vergleiche müssten die betreffenden Gitterabstände viel genauer bekannt sein.

Zusammenfassend muss festgestellt werden, dass zwischen den Teilchenabständen auf Spalt- bzw. Wachstumflächen von Impfsubstanzen und der Eigenschaft dieser Substanzen, den Phasenübergang von flüssigem, unterkühltem Wasser in Eis zu bewirken, kein unmittelbarer primärer Zusammenhang gefunden werden kann.

## b) Störungsversuche der Eiskeimfähigkeit

In einer besonderen Gruppe von Experimenten wurde versucht, die Aktivität von eiskeimfähigen Substanzen zu stören. Es ergaben sich dabei folgende Resultate:

1. Wie an Hand der Röntgendiagramme festgestellt werden konnte, weist unter den hergestellten AgI-Präparaten eines die kubische  $\gamma$ -Modifikation und eines die hexagonale  $\beta$ -Modifikation auf. Das kubische Präparat (Fig. 2) wurde



Figur 2

Debye-Scherrer-Diagramm von AgI aus konz.  $\text{AgNO}_3$ , kubische Struktur.

durch Eingiessen einer KI-Lösung in eine konzentrierte Silbernitratlösung erhalten; die hexagonale  $\beta$ -Modifikation (Fig. 3) durch langsames Auskristallisieren-



Figur 3

Debye-Scherrer-Diagramm von AgI aus HI, hexagonale Struktur.

lassen einer Lösung von AgI in HI, welche mit Alkohol überschichtet war. Obwohl der Reinheitsgrad beider Substanzen in kristallographischer Hinsicht nicht vollständig 100 % war, hätte doch eine starke Verminderung in der Zahl der ausgelösten Eisteilchen auftreten müssen, falls eine Modifikation nicht eiskeimfähig wäre. Es stellte sich aber klar heraus, dass beide Präparate im normalen Wirkungsbereich von AgI ( $-4^\circ$  bis  $-6^\circ$ ) die Vereisung hervorriefen. Dasselbe Resultat ergab sich bei den Präparaten, wo Gemische beider Modifikationen vorlagen, und im Falle von AgI-Rauch.

2. Sehr unübersichtlich wurden die Verhältnisse bei der Untersuchung des Einflusses von Jod auf die Wirksamkeit der Impfsubstanzen.

Jod selbst musste nach mehrfacher Untersuchung schliesslich als nichtkeimfähig bis  $-18^\circ$  angesehen werden. Es war bei diesen Versuchen sehr grosse Vorsicht in der Beobachtung anzuwenden, um nicht leicht zu Fehlschlüssen zu gelangen. Das direkt in der Kühlkammer sublimierte Jod ging sofort in die feste Form über, so dass ein «Regen» von feinsten Jodkristallen einsetzte. Diese vermochten den vorhandenen Nebel nicht zu impfen. Obwohl entstandene Eiskristalle nur sehr schwer von den Jodkristallen unterschieden worden wären, hätte doch der Nebel infolge der Vereisung sehr rasch verschwinden müssen. Dies trat aber nicht ein, der Nebel blieb sogar oft so lange erhalten, bis die Jodpartikel ausgefallen waren.

War CuI bei der Herstellung nicht vollständig reduziert worden, oder wurde reines, weisses CuI mit  $\text{I}_2$  zusammen pulverisiert, so gelang es, die Eiskeimfähigkeit dieser Substanz innerhalb des Temperaturintervalls  $0^\circ$  bis  $-12^\circ$  zu zerstören.

Röntgendiagramme zeigten keine neuen Interferenzlinien. Das dem Präparat beigemengte Jod musste somit adsorbiert worden sein und lag nicht kristallin vor. Wurde dagegen AgI mit Jod zusammen pulverisiert, so konnte keine Störung der Impfeigenschaften festgestellt werden.

Um das Verhalten von AgI und CuI noch intensiver zu studieren, waren aus diesen zwei Komponenten drei verschiedene Mischkristalle hergestellt worden mit 7,3; 9,1 und 91 Gewichtsprozenten AgI. Die Mischkristalle waren aus HI-Lösungen auskristallisiert und röntgenographisch verifiziert worden. Es ergab sich mit zunehmendem CuI-Gehalt ein Absinken der Wirkungstemperatur von  $-4,0^\circ$  bis  $-7,5^\circ$ . Dieses Verhalten muss erneut auf den Einfluss von Jod zurückgeführt werden.

### c) Prüfung des Weylschen Eiskeimfähigkeitsmechanismus

Es ist schliesslich versucht worden, die Gültigkeit des von WEYL<sup>1)</sup> postulierten Impfmechanismus abzuklären. Kristalline Körper weisen je nach Gitterverhältnissen und Polarisierbarkeiten der Gitterteilchen spezielle Oberflächenstrukturen auf. Nach den Weylschen Vorstellungen sind solche Oberflächen bisweilen imstande, die in der Oberfläche eines Wassertropfens vorhandene elektrische Doppelschicht (das negative Ende der Wasserdipole weist nach aussen, das positive Ende nach dem Tropfeninneren), von welcher angenommen werden muss, dass sie den Vereisungsprozess stark hemmen wird, bedeutend zu schwächen. Auf dieser Eigenschaft soll die Eiskeimwirkung eines Stoffes beruhen.

Bei der Prüfung der untersuchten Substanzen bezüglich der Polarisierbarkeit der am Gitteraufbau beteiligten Ionen ergaben sich folgende Verhältnisse:

Als keimfähig erwiesen sich vorzugsweise Impfsubstanzen, welche Anionen mit grosser Polarisierbarkeit im Gitter enthalten:  $O^{--}$ ,  $S^{--}$ ,  $Se^{--}$ ,  $Te^{--}$ ,  $I^-$ . Substanzen mit  $F^-$  oder  $Br^-$  wirken überhaupt nicht, solche mit  $Cl^-$  nur teilweise.

Wurde in einer Verbindung das Kation konstant gehalten und das Anion durch ein anderes ersetzt, so ergab sich, dass mit der Zunahme der Polarisierbarkeit des Anions die Keimfähigkeit der betreffenden Substanz sich verbesserte. Zum Beispiel:

CdF <sub>2</sub>	CuCl	AgCl	HgBr <sub>2</sub>	PbCl <sub>2</sub>	NaCl	KCl	ZnS
CdI <sub>2</sub>	CuBr	Ag <sub>2</sub> O	HgI <sub>2</sub>	PbI <sub>2</sub>	NaI	KI	ZnSe
CdS	CuO	{ AgI Ag <sub>2</sub> S	HgTe				
CdSe	Cu <sub>2</sub> O						
CdTe	{ CuI CuS CuSe						

Im übrigen verweisen wir auf den II. Teil dieser Arbeit.

### d) Allfällige Auswirkung auf die Wolkenimpfversuche

Das Auffinden von neuen Substanzen, die sich im gleichen Temperaturintervall als keimfähig erwiesen, in welchem auch AgI aktiv ist ( $-4^\circ$  bis  $-6^\circ$ ), öffnet neue Perspektiven für die künstliche Auslösung von Niederschlägen in der freien Atmosphäre und für die Bekämpfung der Hagelbildung, in welchen Versuchen grösstenteils AgI als Impfstoff verwendet worden ist. AgI besitzt aber den Nachteil, dass es teuer und relativ unbeständig ist (photolytische Zersetzung unter

<sup>1)</sup> W. A. WEYL, J. Coll. Sci. 6, 389 (1951).

dem Einfluss von UV.-Licht unterhalb 4400 Å). Von den neu gefundenen Substanzen zeichnet sich neben CdTe und Cu<sub>2</sub>O besonders CuS aus. Letztere Impfschubstanz hat die gleiche Keimfähigkeit wie AgI, ist aber aus sehr billigen Ausgangsmaterialien in einfacher Weise darstellbar und zudem sehr beständig.

In diesem ersten Bericht haben wir uns auf die Schilderung der angewandten Untersuchungsmethoden und erhaltenen Ergebnisse beschränkt und sind auf Erklärungsversuche im grossen und ganzen nicht näher eingegangen. Dies soll in einer zweiten Notiz geschehen, in welcher versucht wird, durch Erweiterung der Weylschen Theorie eine Erklärung der Beobachtungen zu geben.

Es ist unsere angenehme Pflicht, der Werkzeugmaschinenfabrik Oerlikon, Bührle & Co., Zürich-Oerlikon, für die zur Verfügung gestellten finanziellen Mittel, Herrn PD. Dr. W. EPPRECHT für die gelegentlichen Ratschläge, Herrn Prof. H. WEBER, Institut für Fernmeldetechnik, für die Bereitstellung geeigneter Räumlichkeiten, herzlich zu danken. Ferner möchten wir auch der Migros-Genossenschaft Zürich für die Überlassung einer Kühltruhe «Hill» und der Firma Trion für die Überlassung eines Elektrofilters unseren Dank aussprechen.

### Summary

An apparatus has been developed which enables the temperature conditions to be studied in a freezer before, during, and after a seeding procedure with an inaccuracy of less than 1°C. With these means it was possible to fix with a fair degree of accuracy the temperature at the moment of phase transition of the liquid undercooled water droplets to ice and to study the dependence of this temperature on the properties of the seeding substance. An illuminating system suitable for the purpose, an improved method for the fine dispersion of the seeding substances and for the formation of clouds, and finally two carefully tested temperature measuring systems formed the basis for this result. The icing nucleability of altogether 104 different substances in dependency on their crystallographic properties and the special arrangement of their grid elements in the surface have been examined. No distinguished crystallographic influence has been found.

(Eingegangen: 26. Mai 1955.)

## Note on the Torsional Rigidity of Cylinders of Circular Sector Cross-Sections

By PEI-LIN SHENG, Bloomington, Indiana, USA<sup>1)</sup>

Numerical values for the torsional rigidities of certain circular sectors have been given by ST. VENANT some 100 years ago [5], [4], [4A]<sup>2)</sup>; in general these values are inaccurate (cf. [3], [2]). Simple explicit results for four cases have been given by STEVENSON [3]. The present author published a short note [1] on this subject before learning of STEVENSON's prior paper. Three of STEVENSON's cases

<sup>1)</sup> Indiana University, Graduate Institute for Mathematics and Mechanics.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 419.



are also re-obtained recently by HERZIG [7]. The present paper gives 16 cases obtained along the same elementary lines as in [1] by using either WHEELON's summation method [6] or a classical elementary summation method (cf. [2], where the eight cases in which the sector angle is a multiple of  $\pi/4$  are worked out in detail and other cases are indicated). Still other cases can be obtained similarly, although it is probable that more than one  $L$ -function will be needed.

As is well-known, the torsional rigidity coefficient  $K$  defined by  $T = \mu \alpha a^4 K$  is given by

$$K = \frac{2}{a^4} \int_A \Psi dA, \quad (1)$$

where  $T$  is the transmitted torque,  $\mu$  the shearing modulus,  $\alpha$  the angle of twist per unit length,  $a$  the radius of the sector,  $A$  the cross-sectional area, and  $\Psi$  the St. Venant stress function for torsion which vanishes at the boundary. After substituting the well-known expression for  $\Psi$  into (1) and performing the integration we get

$$K = \frac{1}{4} (\tan 2k\pi - 2k\pi) - \frac{512k^4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n-4k)n^2(n+4k)^2}, \quad (2)$$

where  $2k\pi$  is the sector angle (hence  $0 < k \leq 1$ ). Splitting the fraction after the sign of summation into partial fractions, not of the first order in  $n$  as usual (this leads to STEVENSON's formulation), but *all of the second order*, i. e.,

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{(n-4k)n^2(n+4k)^2} = \frac{1}{256k^3} \\ & \times \left[ \frac{1}{(n-4k)n} + \frac{5}{n(n+4k)} - \frac{4}{n^2} - \frac{2}{(n+4k)^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

we get

$$\left. \begin{aligned} & K = \frac{1}{4} (2k\pi + \tan 2k\pi) \\ & - \frac{2k}{\pi} \left[ \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n(n-4k)} + 5 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n(n+4k)} - 2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n+4k)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

The split (3) is not unique; other similar decompositions can also be used, giving equivalent results. The first two series in (4) can be summed either by a classical method or by WHEELON's method, while the third one can be expressed in terms of  $L$ -functions (cf. [2]). By WHEELON's method [6], (4) can also be transformed to several integral expressions. As an example, we have

$$\left. \begin{aligned} & K = \frac{1}{4} (2k\pi + \tan 2k\pi) - \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{k(5-8k)}{(1-4k)(3-4k)} \\ & - \frac{1}{2\pi} \left[ 5 \int_0^1 dx \frac{1-x^{4k}}{1-x^2} - \int_0^1 dx \frac{x^4(1-x^{4k})}{1-x^2} \right] + \frac{4k}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{x e^{-(4k+1)x}}{1-e^{-2x}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$



Sector angle $2 k \pi$	$k$	Torsional rigidity coefficient $K$
$\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}$
$2 \pi$	1	$\pi - \frac{64}{9 \pi}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{6} - \frac{2}{\pi} \log 2$
$\frac{3 \pi}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{7}{4 \pi} - \frac{2}{\pi} \log 2$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3 \pi}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \log 2 - \frac{s}{\pi}$
$\frac{3 \pi}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9 \pi}{16} + \frac{1}{2} - \frac{10}{\pi} + \frac{1}{\pi} \log 2 + \frac{3 s}{\pi}$
$\frac{5 \pi}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15 \pi}{16} - \frac{1}{2} - \frac{22}{9 \pi} + \frac{1}{\pi} \log 2 - \frac{5 s}{\pi}$
$\frac{7 \pi}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{21 \pi}{16} + \frac{1}{2} - \frac{484}{25 \pi} + \frac{1}{\pi} \log 2 + \frac{7 s}{\pi}$
$\frac{2 \pi}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5 \pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{18}{\pi} + \frac{3}{2 \pi} \log 3 + \frac{6 t}{\pi}$
$\frac{4 \pi}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5 \pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{54}{25 \pi} + \frac{3}{2 \pi} \log 3 - \frac{12 t}{\pi}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5 \pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2 \pi} \log 3 - \frac{3 t}{\pi}$
$\frac{5 \pi}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{25 \pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1836}{49 \pi} + \frac{3}{2 \pi} \log 3 + \frac{15 t}{\pi}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7 \pi}{72} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{2}{\pi} \log 2 + \frac{3}{2 \pi} \log 3 - \frac{3 w}{8 \pi}$
$\frac{5 \pi}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{35 \pi}{72} + \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{27}{4 \pi} - \frac{2}{\pi} \log 2 + \frac{3}{2 \pi} \log 3 + \frac{15 w}{8 \pi}$
$\frac{7 \pi}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{49 \pi}{72} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{45}{16 \pi} - \frac{2}{\pi} \log 2 + \frac{3}{2 \pi} \log 3 - \frac{21 w}{8 \pi}$
$\frac{11 \pi}{6}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{77 \pi}{72} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{801}{64 \pi} - \frac{2}{\pi} \log 2 + \frac{3}{2 \pi} \log 3 + \frac{33 w}{8 \pi}$

The results, obtained by using (5) except for the last term, for which the last term (in the brackets) in (4) is substituted, are presented in the table, where

$$\left. \begin{aligned} s &\equiv 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots = 0.915, 965, \dots, \\ t &\equiv 1 - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{11^2} + \dots = 0.976, \dots, \\ w &\equiv 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \dots = 0.781, \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

All these are  $L$ -functions of the form  $L(2, \chi)$ ; in particular,  $s$  is the well-known CATALAN'S constant. The two cases for  $k = 1/4, 3/4$  are obtained by a limiting process, since  $\Psi$  has no meaning in such cases.

### Acknowledgement

The author wishes to thank Professor KUAN-HAI TING for his suggestion and counsel, to which the present results are due.

### REFERENCES

- [1] P. L. SHENG, *Note on the Torsional Rigidity of Semi-Circular Bars*, Quart. Appl. Math. 9, 309–310 (1951).
- [2] P. L. SHENG, *Torsional Rigidity of Cylinders of Circular Sector Cross-Sections* (in Chinese), Taiwan Engin. Monthly 7, no. 12, 11–15 (1954).
- [3] A. C. STEVENSON, *Flexure with Shear and Associated Torsion in Prisms of Uni-Axial and Asymmetric Cross-Sections*, Phil. Trans. Roy. Soc. London [A] 237, 161–229 (1938).
- [4] S. TIMOSHENKO, *Theory of Elasticity*, 1st ed. (McGraw-Hill, New York, 1933), p. 250.
- [4A] S. TIMOSHENKO and J. N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, 2nd ed., (McGraw-Hill, New York 1951), p. 279.
- [5] I. TODHUNTER and K. PEARSON, *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to the Present Time*, vol. II, part I (Cambridge Univ. Press, London 1893), p. 193.
- [6] A. D. WHEELON, *On the Summation of Infinite Series in Closed Form*, J. Appl. Phys. 25, 113–118 (1954).
- [7] A. HERZIG, *Zur Torsion von Stäben*, ZAMM 33, 410–428 (1953).

### Zusammenfassung

Für 16 besondere Kreisausschnittwinkel wird die Drillungssteifigkeit eines Stabes mit Kreissektor-Querschnitt durch  $L$ -Funktionen ausgedrückt.

(Received: March 25, 1955.)

## Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 7. bis 8. Mai 1955 in Vevey

### Berichte über angewandte Physik und Mathematik

**Zur Messung des Rauschens von Transistoren**, von E. BALDINGER und F. LEUENBERGER, Basel<sup>1)</sup>.

Transistoren erzeugen einen Störspannungsuntergrund, der eine Grenze darstellt bezüglich der sinnvollen Verstärkung kleiner Signale. Vom Standpunkt der Anwendungen aus interessiert uns die Kenntnis folgender Grössen: Rauschspannung des Emitters bzw. des Kollektors und die Korrelation dieser Rauschspannungen. Die in Figur 1 skizzierte Messeinrichtung dient zur Messung dieser Grössen.

Die beiden Signale werden verstärkt, und, nachdem sie auf gleichen Pegel gebracht worden sind, auf eine Additionsstufe (B) gegeben. Das Ausgangssignal derselben wird über ein Filter (C) einem linearen Detektor (D) zugeführt. Mittels der Phasenumkehrstufe (A) können die Signale zur Bestimmung des Korrelationskoeffizienten sowohl addiert wie auch subtrahiert werden. Zwei Teile der Messschaltung, die erste Verstärkerstufe und der lineare Detektor, sollen hier kurz skizziert werden.

Bei der Verstärkung kleiner Signale im Tonfrequenzgebiet hat man für jeden Verwendungszweck die geeignete Röhre wie auch deren optimale Betriebsbedingungen zu finden<sup>2)</sup>. Die Röhre ES0F (Philips) weist einen genügend kleinen äquivalenten Rauschwiderstand auf und ist ausserdem sehr wenig mikrophonisch. Das gemessene Rauschspektrum<sup>3)</sup> des besten Exemplars aus einer Anzahl von 25 liess sich darstellen durch  $R_d = 1670 + 750/f$ . Der  $1/f$ -Term entspricht dem Funkeffekt. Bei 1000 Hz beträgt der Rauschwiderstand  $2,35 \text{ k}\Omega$ , ein Wert, der nur um den Faktor 1,35 höher liegt als der asymptotische Wert für hohe Frequenzen (Schroteffekt).

Üblicherweise werden bei Rauschmessungen quadratische Detektoren verwendet, da diese unmittelbar den quadratischen Mittelwert  $U_{eff}$  messen. Der bei unseren Messungen verwendete lineare Detektor hat gegenüber einem quadratischen Röhrendetektor den Vorteil einer erheblich besseren Nullpunktkonstanz. Ist die Wahrscheinlichkeit  $W(U) dU$ , dass der Spannungswert im Intervall  $U, U + dU$  liegt, durch

$$W(U) dU = \frac{1}{\sqrt{2\pi} U_{eff}} e^{-(U/U_{eff})^2/2} dU$$

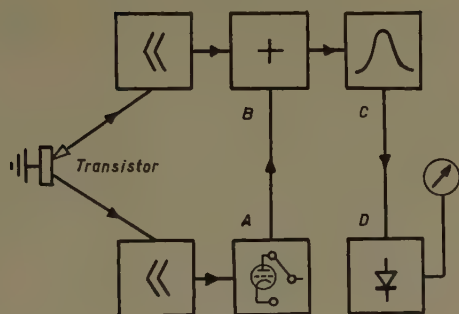
gegeben, dann gilt folgende Beziehung zwischen dem Effektivwert und dem Mittelwert  $\bar{U}$  des linearen Detektors (schraffierte Fläche in Figur 3)

$$\bar{U} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{2\pi}}.$$

<sup>1)</sup> Physikalisches Institut der Universität.

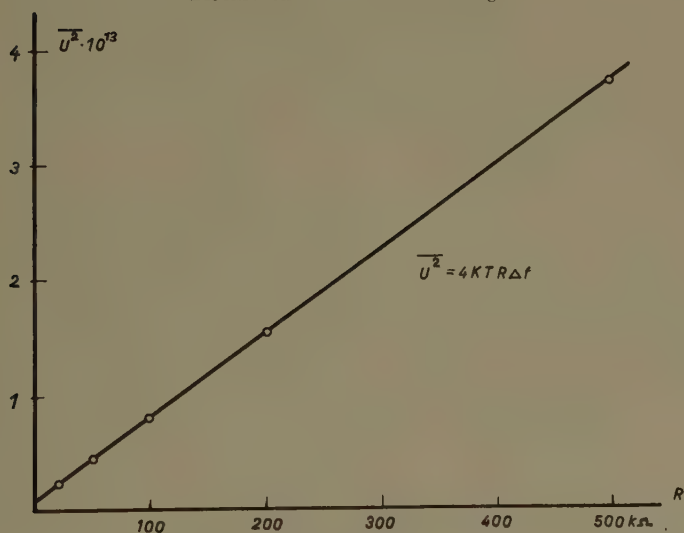
<sup>2)</sup> Vgl. zum Beispiel A. VAN DER ZIEL, *Noise* (Prentice Hall, New York 1954), S. 230.

<sup>3)</sup> Gemessen zwischen 200 Hz und 8 kHz.



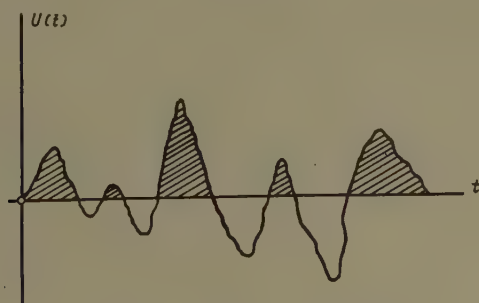
Figur 1

Blockschema der Messeinrichtung.



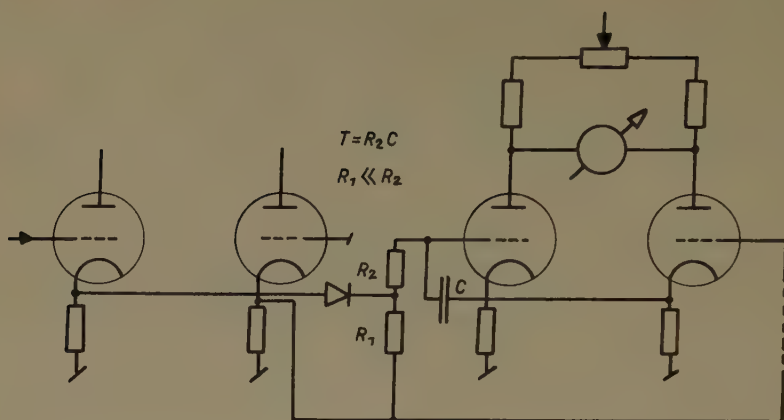
Figur 2

Kontrolle der Apparatur mit Hilfe des Nyquist-Rauschens.

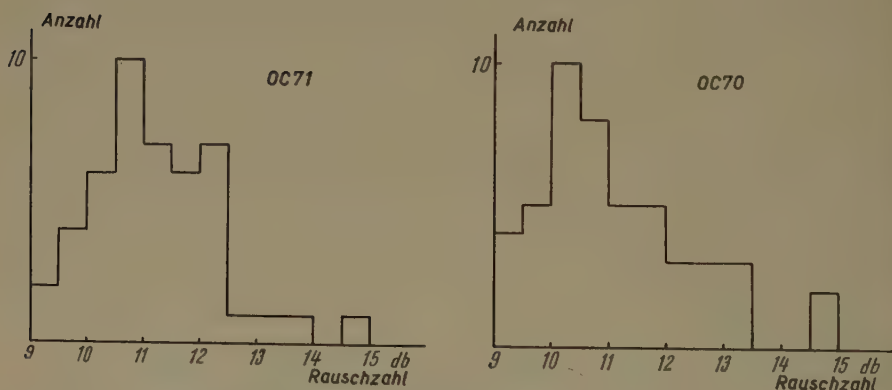


Figur 3

Zeitlicher Verlauf der Rauschspannung.



Figur 4  
Prinzipschema des linearen Detektors.



Figur 5

Verteilung der Rauschzahlen. Frequenz: 1000 Hz. Effektive Bandbreite: 45 Hz. Emittorstrom: 2 mA. Kollektorspannung:  $-2$  V. Quellenwiderstand  $R_s$ : 500  $\Omega$ .  $T$ : 295° K.

Als Test für die Zuverlässigkeit der gesamten Apparatur dient die experimentelle Überprüfung (Figur 2) der Nyquist-Formel  $\bar{U}^2 = 4 k T R \Delta f$ . Hätte man neben dem Widerstandsrauschen etwa den Schroteffekt eines Gitterstromes als weitere Störquelle, so wäre  $\bar{U}^2$  nicht mehr eine lineare Funktion von  $R$ .

Figur 5 zeigt Rauschzahlmessungen an  $p-n-p$ -Transistoren der Typen OC 70 und OC 71 (Philips). Es wurden je 50 Exemplare untersucht<sup>1)</sup>.

Für die finanzielle Unterstützung der vorliegenden Untersuchungen möchten wir der Stiftung Hasler-Werke, Bern, unseren besten Dank aussprechen.

<sup>1)</sup> Vgl. entsprechende Untersuchungen von W. GUGGENBÜHL und M. J. O. STRUTT, Arch. Elektr.-Übertragung 9, 103–108 (1955).



### Knickung verwundener Stäbe, von E. HUI, Eschlikon.

Ein gerader elastischer Stab mit zwei verschiedenen Hauptträgheitsmomenten des Querschnittes, dessen Hauptachsen im spannungslosen Zustand um einen festen Winkel je Längeneinheit des Stabes gegeneinander verdreht sind, wird an beiden Enden durch eine in der Längsrichtung wirkende Kraft konstanter Richtung und konstanten Betrages auf Druck beansprucht. Bei verschiedenen Fällen der Lagerung des Stabes an beiden Enden wird die Knicklast berechnet und die elastische Linie beim Beginn der Knickung bestimmt.

Die Arbeit wird als Dissertation (ETH) erscheinen.

Die Ergebnisse sind bisher durch Experimente nicht überprüft worden.

### Entwurf eines elektrischen Analogiegerätes für den schweizerischen Versuchsreaktor, von MAURICE MARTIN, Zürich.

Es soll ein elektrisches Analogiegerät zur Untersuchung des Betriebsverhaltens des Versuchsreaktors entworfen und gebaut werden. Das Gerät wird zur Zeit bei Landis & Gyr in Zug aufgebaut und soll, wenn Messergebnisse vorliegen, in einer späteren Veröffentlichung genauer beschrieben werden. Hier soll zunächst nur die prinzipielle Arbeitsweise erläutert werden.

Der mit schwerem Wasser als Moderator und Kühlmedium angefüllte Reaktortank aus Aluminium befindet sich innerhalb eines als Neutronenspiegel dienenden Graphitreflektors und einer 2 m dicken Betonabschirmung. 200 Uranstäbe von 27 mm Durchmesser tauchen in den Tank ein und werden von oben nach unten vom Moderatorwasser umspült und gekühlt. Die Kettenreaktion mit  $U^{235}$  wird mit Hilfe von Regulierstäben gesteuert, indem durch die Absorption von Neutronen in Kadmium der Neutronenmultiplikationsfaktor  $k$  verändert wird. Im Gleichgewichtszustand ist die mittlere Dichte thermischer Neutronen  $n$  konstant und  $k = 1$ . Abweichungen vom Gleichgewichtszustand werden durch die sogenannte Reaktivität  $\delta k = k - 1$  charakterisiert. Das dynamische Verhalten des Reaktors muss also durch eine Differentialgleichung beschrieben werden, in der die Reaktivität als Ursache und die Neutronendichte als Wirkung eingehen. Man kann dabei von der makroskopischen und der mikroskopischen Neutronendichteverteilung absehen und mit einer mittleren, zur Wärmeleistung proportionalen Dichte  $n$  rechnen, wenn nur die Verteilung leistungsunabhängig angenommen werden darf.

Bezeichnen wir mit  $t_0$  die mittlere Lebensdauer thermischer Neutronen – sie beträgt etwa 1 Millisekunde – so verschwinden im Mittel  $n/t_0$  pro Sekunde. Jede Kernspaltung erzeugt im Mittel wieder 2,5 neue Neutronen, von denen aber im Gleichgewicht nur eines wieder von einem  $U^{235}$ -Kern eingefangen wird. Ein kleiner Bruchteil von etwa 0,8% der neu erzeugten Neutronen erscheint nicht sofort bei der Spaltung, sondern mit einiger Verzögerung. Es handelt sich um Neutronen, welche beim Zerfall von Spaltprodukten mit Halbwertszeiten zwischen 0,1 und 80 s entstehen. Dieser kleine Bruchteil verzögerter Neutronen gegenüber den prompten ist für die Steuerung der Kettenreaktion sehr bedeutend und erleichtert die Aufgabe der Regulierung wesentlich. Ist  $c_i$  die Konzentration des Spaltproduktes mit der Zerfallskonstanten  $\lambda_i$ , so werden pro Sekunde  $\lambda_i c_i$  verzögerte Neutronen von der Gruppe  $i$  gebildet. Praktisch kommen sechs Gruppen in Frage; dann kommen noch zwei Gruppen verzögerter Neutronen hinzu, welche durch Photospaltung des Deuteriums entstehen. Mit einer Häufigkeit  $\beta_i$  für die Bildung des Spaltproduktes  $i$  können wir für die Konzentration  $c_i$  schreiben:

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{t_0} k n - \lambda_i c_i \quad (i = 1, \dots, 8).$$

Für die Änderung der Neutronendichte  $n$  können wir schreiben:

$$\frac{dn}{dt} = [(1 - \beta) k - 1] \frac{n}{t_0} + \sum_i \lambda_i c_i + s \quad (\beta = 0,8 \%) .$$

Hierin ist  $s$  die Quelle von Fremdneutronen, welche durch spontane Spaltung und aus der kosmischen Strahlung entsteht.

Für den Entwurf einer elektrischen Analogieschaltung zur Nachbildung der reaktorkinetischen Gleichungen liegt es auf der Hand, die Aufladung eines Kondensators zu benützen und als Mass für die Neutronendichte die Kondensatorspannung zu wählen. Der Ladestrom muss der rechten Seite der jeweils nachgebildeten Gleichung entsprechen. In der Differentialgleichung für die Neutronendichte  $n$  ist die Produktion prompter Neutronen der Dichte  $n$  selber proportional, das heisst, in der Simulatorschaltung muss der entsprechende Beitrag zum Ladestrom der Kondensatorspannung proportional gemacht werden. Um dies zu erzielen, wird die Ladekapazität so zwischen Eingang und Ausgang eines linearen Gleichstromverstärkers geschaltet, dass die Kondensatorspannung gleich der halben Ausgangsspannung wird. Am Ausgang hat man dann symmetrisch zum Erdpotential eine positive und eine negative Spannung, die beide zur Neutronendichte  $n$  proportional sind und zur Speisung eines schnell schreibenden Registrierinstrumentes herangezogen werden können. Der Reaktorgleichung entspricht nunmehr die elektrische Ladegleichung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{C} \sum i .$$

Es muss nun eine Schaltung gewählt werden, mit Hilfe derer wir die aus einem stabilisierten Gleichspannungsnetz entnommenen Ströme leistungslos so steuern können, dass sie den Grössen proportional sind, die in den reaktorkinetischen Gleichungen vorkommen. Hierfür eignet sich eine Kathodenfolgerschaltung, bei der eine Triode so zwischen  $\pm 300$  V geschaltet wird, dass eine an richtiger Stelle des Kathodenwiderstandes abgegriffene Spannung mit recht guter Genauigkeit der Gitterspannung proportional ist. Die Proportionalitätskonstante ist nahezu 1. In einem von BELL und STRAUSS [Rev. Sci. Instr. 21, 760 (1950)] beschriebenen Pile-Simulator wird die Doppeltriode 6SU7GTJ verwendet, welche eine mit hochisolierendem Sockel ausgerüstete, ausgesuchte 6SL7 ist.

Die gewünschte Reaktivität (prompte Neutronen) wird an einem zwischen den Ausgangsklemmen des Verstärkers liegenden Helipot-Potentiometer eingestellt. Die verzögerten Neutronengruppen werden durch eine entsprechende Anzahl gleichartiger Schaltelemente nachgebildet, bei welchen im Gitterkreis des Kathodenfolgers ein  $R - C$ -Glieder mit richtiger Zeitkonstante der Gruppe mit der Zerfallskonstanten  $\lambda_i$  entspricht. Die Dimensionierung der Widerstände und der Kondensatoren ergibt sich durch einen Vergleich der reaktorkinetischen und elektrischen Gleichungen.

Die Nachbildung des Einflusses der Temperaturänderungen in den Uranstäben und im Moderator auf die Reaktivität und ebenso derjenige der Vergiftung des Urans durch das die Neutronen sehr stark absorbierende Spaltprodukt Xenon ( $\text{Xe}^{135}$ ) geschieht durch ähnliche Schaltungen wie für die Nachbildung der prompten und der verzögerten Neutronen. Allerdings müssen Produkte zwischen zwei Grössen bzw. Spannungen gebildet werden können, was mit Hilfe von elektromechanischen Multiplikationssystemen kleiner Reaktionszeit bewerkstelligt werden kann.

Mit Hilfe dieses Pile-Simulators soll die für die Regulierung wichtige Übertragungsfunktion ermittelt werden. Sodann kann ein Modell für den Servomechanismus der Regulierung damit untersucht werden. Schliesslich ermöglicht die Untersuchung des zeitlichen Verhaltens der Neutronendichte bei verschiedenen Reaktivitätsänderungen die Aufstellung eines Programms für das Anlassen und Abstellen des Reaktors, was jeweils mit genügender Vorsicht zu geschehen hat.

### Jahrestagung GAMM 1956

Die Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) veranstaltet ihre nächste wissenschaftliche Jahrestagung in der Zeit vom 22. bis 26. Mai 1956 (Pfingstwoche) in Stuttgart. Die örtliche Tagungsleitung liegt in Händen von Professor Dr. GÜNTHER SCHULZ, Mathematisches Institut A der Technischen Hochschule Stuttgart. H. GÖRTLER

### Erratum

**Asymptotische Entwicklungen für Fresnelsche Integrale und verwandte Funktionen und ihre Anwendungsmöglichkeiten bei der Berechnung spezieller Raketenbahnen.** Von JOSEF ZBORNÍK, Chur (ZAMP 5, Fasc. 4, 345 [1954]).

Wie P. HENRICI (ZAMP 6, Fasc. 2, «Kleine Bemerkungen...») hervorhob, weist der Aufsatz *Asymptotische Entwicklungen für Fresnelsche Integrale...*, ZAMP 5, Fasc. 4, 345 ff. (1954), zwei Inkorrektheiten auf. Zu ihrer Berichtigung sind folgende Korrekturen vorzunehmen:

Es ist zu streichen: S. 347, 7. Zeile von unten: «... das Restglied...»

Es ist zu setzen:

S. 347, 6. Zeile von unten:  $x^n R_n(x)$  anstatt  $R_n(x)^1$ .

5. Zeile von unten:  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \int_x^\infty \dots$  anstatt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^\infty \dots$

S. 348, 3. Zeile von oben:  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n L_1$  anstatt  $\lim_{x \rightarrow \infty} L_1$ ,

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n L_2$  anstatt  $\lim_{x \rightarrow \infty} L_2$ .

4. Zeile von oben:  $x^n R_n(x)$  anstatt  $R_n(x)$ .

S. 349, 10. Zeile von unten: «Da in den betrachteten...» anstatt «Da in ...»

<sup>1)</sup> Vgl. zum Beispiel: LENSE, *Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik*, 2. Aufl. (Walter de Gruyter & Co., Berlin 1947), S. 6

---

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques
 

---

**Technische Dynamik.** 2. Auflage. Von C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL (Springer-Verlag, Berlin 1953). Band I: XII + 700 S., 413 Abb., 3 Tafeln; DM 66.–. Band II: VIII + 452 S., 315 Abb., 3 Tafeln; DM 44.–.

Die moderne Technik stellt an den konstruktiv tätigen Ingenieur immer höhere Anforderungen. Die «Sicherheitsspanne» zwischen Betriebs- und Bruchbeanspruchung schrumpft zusammen, so dass näherungsweise Berechnung nicht mehr genügt und die höhere Festigkeitslehre herangezogen werden muss, um die auftretenden Spannungen mit genügender Genauigkeit im voraus zu berechnen. Es ist also zweifellos ein Bedürfnis nach einem Handbuch über schwierigere Teilgebiete der Mechanik vorhanden, und damit erklärt sich der Erfolg, welcher der im Jahre 1939 erschienenen *Technischen Dynamik* beschieden ist.

Die zweite Auflage dieses Werkes liegt nun vor. Es handelt sich hier nicht um ein Lehrbuch für den Studenten, sondern um eine Auswahl statischer und kinetischer Probleme, die sich durch die Methoden der theoretischen Mechanik untersuchen lassen.

Im ersten Band werden zunächst die Grundlagen der Elastomechanik behandelt, wobei mehr als 100 Seiten den verschiedenen Lösungsmethoden gewidmet sind. Als wertvolle Ergänzung gegenüber der ersten Auflage ist die Darstellung der Southwellschen Relaxationsmethode hervorzuheben sowie die allerdings etwas stiefmütterlich behandelte Beschreibung der Dehnungsmeßstreifen-(Strain-Gauges-)Methode.

Der Hauptwert des Buches liegt zweifellos im zweiten Abschnitt, der verschiedene der Technik entnommene Einzelprobleme behandelt. Dieser Teil ist eine wahre Fundgrube für den auf dem Gebiet der höheren Festigkeitslehre tätigen Ingenieur. Nicht nur sind die mathematischen Ableitungen von einer muster-gültigen Klarheit, sondern die vielen numerischen Beispiele sowie die zahlreichen Kurventafeln erleichtern dem mathematisch wenig geschulten Ingenieur die Durchführung der Berechnungen.

Stab und Welle, Feder und Ring, Platte und Schale bilden die Hauptabschnitte dieses Bandes, wobei nicht nur Gleichgewichtszustände betrachtet werden; auch Ausweichprobleme, Knickung und Umkipfung werden sehr ausführlich, zum Teil nach neuen Gesichtspunkten behandelt.

Der zweite Band ist den Fragen der Belastung durch Massenkräfte gewidmet, insbesondere den rotierenden Scheiben. Die Berechnung der Turbinenschaufeln bildet den Gegenstand eines Kapitels, wobei die Biegungsschwingungen besonders ausführlich berücksichtigt werden. Leider fehlt jeder Hinweis auf Torsions-schwingungen sowie auf komplexe Schwingungsformen, obwohl gerade letztere dem Praktiker viel Kopfzerbrechen verursachen.

Der Abschnitt über kritische Drehzahlen ist eine mustergültige Darstellung dieses klassischen Kapitels der technischen Dynamik. Der Referent vermisst hier einen Abschnitt über Theorie und Praxis des Auswuchtens sowie einen Hinweis auf selbsterregte Schwingungen rotierender Wellen. Die zweite Hälfte des zweiten Bandes behandelt ausführlich Probleme der Kolbenmaschinen, wie Massenausgleich, Leistungsausgleich und Drehschwingungen.

Ein gutes Inhalts- und Sachverzeichnis erleichtern den Gebrauch des vom Springer-Verlag wie üblich ausgezeichnet gedruckten Buches, das dem theoretisch geschulten Ingenieur bestens empfohlen wird.

P. de Haller



**Baustatik.** Volume 1, 2<sup>e</sup> édition. Par FRITZ STÜSSI (Verlag Birkhäuser, Bâle 1953). 370 p., 336 fig.; 40 fr.s 05.

Rappelons que cet ouvrage est la reproduction, sous une forme élargie, du cours de «Statique des constructions I» donné par le professeur STÜSSI aux élèves de la Section du Génie civil de l'Ecole polytechnique fédérale. L'auteur y expose avant tout les théories et les méthodes les plus récentes permettant de calculer les tensions et les déformations des systèmes statiquement déterminés. Il y donne aussi une introduction à la théorie de la stabilité des constructions. La dernière partie est consacrée à l'équilibre des fils.

La seconde édition de ce livre, tout en étant une mise au point soignée de l'ouvrage, contient également un certain nombre d'améliorations et de compléments utiles. Signalons, en particulier, les modifications apportées au chapitre sur les arcs à trois articulations (III, 3), à celui sur les moments d'inertie (VI, 1) et à la IX<sup>e</sup> partie concernant l'étude de la stabilité.

Cet ouvrage se distingue non seulement par une excellente présentation, mais aussi par ses qualités d'exactitude et de clarté, qui le recommandent vivement aux étudiants ainsi qu'aux ingénieurs de la pratique. *Henry Favre*

**Proceedings of the Eastern Joint Computer Conference**, gehalten vom 8. bis 10. Dezember in Washington, D.C. Herausgegeben durch The Institute of Radio Engineers, Inc., New York. 125 S., 64 Fig.; \$3.00.

Die Broschüre gibt 25 Vorträge wieder, welche über das Sammelthema «Information Processing Systems—Reliability and Requirements» gehalten wurden. Dementsprechend werden hauptsächlich Betriebserfahrungen mit bestehenden elektronischen Rechanlagen sowie mit Einzelteilen gegeben, und es sind Verfahren diskutiert, die die heute noch unbefriedigende Betriebssicherheit verbessern sollen. Ferner werden einige Schaltelemente sowie neue Anwendungsgebiete für solche Maschinen beschrieben. — Für den Praktiker ist dieses Protokoll mit seinen ausführlichen, zahlenmässigen Angaben von grossem Wert. *A. P. Speiser*

**Crystal Growth and Dislocations.** Von A. R. VERMA (Butterworth Scientific Publications, London 1953). XII + 182 S., 76 Fig.; 30s.

Auf Grund der morphologischen Betrachtung von Kristallen war es schon lange bekannt, dass die Hauptwachstumsflächen in der Regel niedrig indizierbar sind. W. KOSSEL und I. N. STRANSKI haben vor etwa fünfundzwanzig Jahren zeigen können, dass diese Erscheinung energetisch leicht verständlich ist. Wenn man nämlich die Anlagerung von neuem Material an eine bereits bestehende Kristallfläche Schritt für Schritt verfolgt, so zeigt es sich, dass der grösste Energiegewinn dann erfolgt, wenn sich an irgendwelche zufällig vorhandene oberflächliche Höcker (insbesondere monoatomare Schichtstücke) seitlich Material anlagert, die Oberflächenerhebungen sich somit ausbreiten, bis sie völlig verschwinden. Demgegenüber ist es energetisch sehr unwahrscheinlich, dass sich auf idealen Wachstumsflächen neue Keime solcher Schichten bilden, die seitlich wiederum wachsen könnten. Man konnte deshalb bis vor kurzem nicht verstehen, wieso Kristalle mit glatten Grenzflächen trotzdem weiterwachsen können. Durch einen Gedanken von F. C. FRANK hat nun die Wachstumsforschung einen starken Auftrieb erhalten, indem er 1949 die Hypothese aufstellte, dass immer dann, wenn eine Schraubenversetzung (bestimmte Gitterstörung) an die Oberfläche eines Kristalls reicht, dort eine beim Wachstum nie verschwindende Stufe entsteht, an welcher sich nach dem Kossel-Stranski-Mechanismus ständig neues Material anlagern kann. FRANK zeigte, dass um den Ausstichpunkt einer solchen



Versetzung eine monoatomare Wachstumsschicht sich spiralenförmig nach aussen bewegt, die zu einer äusserst flachen Wachstumspyramide führt. Seit 1950 sind nun mittels elektronenmikroskopischer Untersuchungen und mit dem Phasenkontrastmikroskop, dem Interferometer und anderen optischen Hilfsmitteln an zahlreichen Kristallarten tatsächlich derartige Wachstumsspiralen nachgewiesen worden, so dass heute kein Zweifel mehr darüber bestehen kann, dass der Frank'sche Spiralwachstumsmechanismus tatsächlich ablaufen kann.

A. R. VERMA hat insbesondere an Siliziumkarbid zahlreiche Varianten des Spiralwachstums eingehend untersucht und berichtet nun in der vorliegenden Monographie an Hand sehr guter Abbildungen über diese Phänomene, ihre Erklärung und die angewandten Untersuchungsmethoden. Er bezieht dabei alle bis 1953 bekanntgewordenen Fälle des Spiralwachstums mit in seine Arbeit ein und gibt dadurch einen ausserordentlich eindrucklichen Überblick über dieses neue Forschungsgebiet, das zwischen Realbauforschung und Kristallmorphologie vermittelt. Das Büchlein ist daher jedermann sehr zu empfehlen, der sich mit diesen Gebieten beschäftigt. Der sehr leicht verständliche Text macht es jedoch auch jedem Nichtfachmann möglich, sich über die moderne Wachstumstheorie zu orientieren.

W. Epprecht

**Journal of the Association for Computing Machinery.** Herausgegeben durch die Association for Computing Machinery (Präsident S. B. WILLIAMS). 4 Hefte jährlich.

Die Zeitschrift ist als Fachorgan auf dem Gebiet der elektronischen Rechenmaschinen gedacht. In einzelnen Artikeln soll hauptsächlich über die Fortschritte in der Technik der programmgesteuerten Maschinen berichtet und die einzelnen Neukonstruktionen beschrieben werden. Auch die mathematische Organisation und die Anwendung derartiger Geräte gehört in den Rahmen der Zeitschrift.

Inhalt von Nr. 1: S. B. WILLIAMS, *The Association for Computing Machinery*. – J. W. BACKUS, *The IBM 701 Speedcoding System*. – R. T. WISEMAN, *Life Insurance Premium Billing and Combined Operations by Electronic Equipment*. – F. E. HAMILTON and E. C. KUBIE, *The IBM Magnetic Drum Calculator Type 650*. – H. JACOBS, JR., *Equipment Reliability as Applied to Analogue Computers*. – C. M. EDWARDS, *Survey of Analogue Multiplication Schemes*. – RICHMOND PERLEY, *Automatic Strain-Gage and Thermocouple Recording on Punched Cards*. – News and Reports. Supplement: *ONR Digital Computer Newsletter*. E. Stiefel

**Planen und Auswerten von Versuchen.** Von A. LINDER (Verlag Birkhäuser, Basel 1953). 182 S.; Fr. 21.—.

Das Buch ist in erster Linie für Biologen und auch für Ingenieure bestimmt, die Versuche statistisch auswerten müssen. Es enthält die Darstellung der einfacheren Methoden der statistischen Planung, und zwar durch genaue Beschreibung durchgeführter Experimente und ihrer Auswertung. Das Buch verlangt praktisch keine Vorkenntnisse in der mathematischen Statistik. Am Schlusse sind einige mathematische Anmerkungen beigelegt.

Es handelt sich um das erste in deutscher Sprache geschriebene Buch über statistische Planung. Mit Rücksicht auf die einfache, zweckmässige und klare Darstellung und die vielen Beispiele aus der Praxis zweifeln wir nicht daran, dass es vor allem bei den Biologen, Medizinern, aber auch bei einem weitem Kreis von Wissenschaftlern grossen Anklang finden wird. Tatsächlich stellt es eine wertvolle Einführung und Anleitung auf dem Gebiet der statistischen Planung dar, die auch für experimentell arbeitende Physiker, Ingenieure und andere von Interesse sein dürfte.

W. Saxer

*In Kürze erscheint:*

---

G. Doetsch

# Handbuch der Laplace-Transformation

Band II

Anwendungen der Laplace-Transformation

1. Abteilung

436 Seiten mit 48 Figuren

Ganzleinen Fr./DM 56.15, broschiert Fr./DM 52.-

*Aus dem Inhalt:*

Asymptotische Entwicklungen – Konvergente Entwicklungen –  
Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Während der erste Band die theoretischen Grundlagen der Laplace-Transformation zum Gegenstand hat, behandelt der vorliegende zweite und der nachfolgende dritte Band die Anwendungen, wobei es sich natürlich nicht nur um sogenannte «angewandte Mathematik», sondern um die verschiedensten Gebiete der reinen und angewandten Mathematik handelt, in welche die Laplace-Transformation als Hilfsmittel eingreift.

---

Zu beziehen durch die Buchhandlungen

Achtseitiger Sonderprospekt steht auf Wunsch zur Verfügung

**BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL/STUTTGART**



## Neuerscheinungen

### MATHEMATIK

- Blaschke, Geometrie der Waben.** Von Professor Dr. Wilhelm Blaschke, Hamburg. 108 Seiten mit 42 Figuren. Broschiert Fr./DM 15.25. Sammlung «Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus», Band 4.
- Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation.** In drei Bänden. Von Professor Dr. Gustav Doetsch, Freiburg. *Band II:* Die Anwendungen der Laplace-Transformation. 1. Abteilung. 436 Seiten mit 48 Figuren. Ganzleinen Fr./DM 56.15. Broschiert Fr./DM 52.-.
- Haack, Elementare Differentialgeometrie.** Von Professor Dr. Wolfgang Haack, Berlin. 239 Seiten mit 25 Figuren. Ganzleinen Fr./DM 22.-. Broschiert Fr./DM 18.70.
- Schläfli, Gesammelte mathematische Abhandlungen.** In drei Bänden. Herausgegeben im Auftrag der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft vom Komitee Steiner-Schläfli der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, ergänzt und erläutert durch Nachworte der Herausgeber. *Band III:* 402 Seiten mit 28 Figuren. Ganzleinen Fr./DM 59.30.
- Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung.** Mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf die Krystallographie. Von Professor Dr. Andreas Speiser, Basel. Vierte berichtigte und erweiterte Auflage. XI und 271 Seiten mit 43 Figuren, einer Farbtafel und einem Anhang. Im Druck.
- Weyl, Selecta Herman Weyl.** Herausgegeben zu seinem siebzigsten Geburtstag von der ETH. Zürich und vom Institute for Advanced Study in Princeton. Rund 600 Seiten mit Figuren. Ganzleinen Fr./DM 48.90.

### Wissenschaft und Kultur

- Speiser, Die geistige Arbeit.** Von Professor Dr. Andreas Speiser, Basel. 216 Seiten. Fr./DM 19.25. Ganzleinen. Sammlung «Wissenschaft und Kultur», Band 9.
- Van der Waerden, Erwachende Wissenschaft.** Von Prof. Dr. Bartel van der Waerden, Zürich. Übersetzung aus dem Holländischen von Helga Habicht. Mit Zusätzen vom Autor versehen. Im Druck. Sammlung «Wissenschaft und Kultur», Band 8.
- Weyl, Symmetrie.** Von Professor Dr. Hermann Weyl, Zürich und Princeton. Übersetzung aus dem Englischen von Professor Dr. Lulu Bechtolsheim. 157 Seiten mit 72 Abbildungen. Im Druck. Sammlung «Wissenschaft und Kultur», Band 11.
- Weitzenböck, Der vierdimensionale Raum.** Von Professor Dr. Roland W. Weitzenböck, Zehem. 224 Seiten mit 52 Figuren. Fr./DM 19.55. Im Druck. Sammlung «Wissenschaft und Kultur», Band 10.